Algebra 8a classe

3. Numeri negativi

1) Ripasso numeri negativi

Se ho un conto bancario con 1000 Fr., e do alla banca un ordine di versamento per una fattura di 1200 Fr., il mio conto scenderà a -200 Fr. Il segno negativo (-) è un informazione supplementare per ricordarmi che il mio conto è in negativo, e che è stata fatta l'operazione 1000-1200 = -200. Il primo meno indica l'operazione che viene effettuata, mentre il secondo indica una *qualità* del risultato.

Possiamo controllare lo *stato di un conto* alla mattina e osservare poi le *entrate* ed *uscite* durante la giornata per stabilire in questo modo lo stato del conto alla sera.

Stato del conto alla mattina	120	75	-70	-90
Entrate	50	30	130	60
Uscite	200	80	50	40
Stato del conto alla sera	-30	+25	+10	-70

Espresse come somme:

$$120 + 50 - 200 = -30$$
$$75 + 30 - 80 = +25$$
$$-70 + 130 - 50 = +10$$
$$-90 + 60 - 40 = -70$$

Si può notare che in realtà abbiamo sommato e sottratto solo numeri positivi. Numeri negativi sono apparsi solo come *Stato del conto* all'inizio e alla fine.

Esempio analogo con le temperature:

Temperatura alla mattina	15	4	-3	-4
Rialzo di temperatura	7	1	8	14
Discesa di temperatura	12	7	7	2
Temperatura alla sera	+10	-2	-2	+8

Espresso come somme:

15 + 7 - 12 = +10
4 + 1 - 7 = -2
-3 + 8 - 7 = -2
-4 + 14 - 2 = +8

Questo salire e scendere si può anche osservare sulla retta dei numeri.

```
   -15          -10          -5           0           +5          +10          +15
|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|
```

Punto di partenza	+7	+2	-3	-10
Passi a destra	5	3	8	5
Passi a sinistra	4	9	4	3
Punto di arrivo	+8	-4	+1	-8

Espresso come somme:

7 + 5 - 4 = +8
2 + 3 - 9 = -4
-3 + 8 - 4 = +1
-10 + 5 - 3 = -8

es. per i ragazzi: -9 11 4
8 14 7
15 3 21

Con questi esempi non abbiamo ancora però fatto calcoli con numeri negativi. Abbiamo solo sommato e sottratto numeri positivi.

Ricordare bene che una data *posizione* (anche negativa) sulla *scala dei numeri* è una *qualità* di quella posizione, che è diversa dall'operazione stessa di *sommare (+) e sottrarre (-)*!!
Lo stesso vale per lo *Stato del conto* in un dato momento della giornata.

Cosa significa quindi se *sommo* un *numero negativo?*

$$5 + (-7) = ?$$

Per comprendere questo calcolo dobbiamo pensare a *qualità opposte*.
Per esempio, prendiamo il caso di *Averi* e *Debiti*

Il concetto diventa subito chiaro:

5 Averi + 7 Debiti = 2 Debiti

Per rimanere vicino al concetto, utilizziamo i simboli A (*Averi*) e S (*Debiti*):

5 A + 7 D = 2 D

Possediamo quasi sempre degli *Averi* e dei *Debiti* allo stesso momento. Per sapere, in un dato momento, quale è la nostra situazione finanziaria, dobbiamo quindi sommare *Averi* e *Debiti*.

12 A + 7 A + 3 D = 16 A
9 A + 8 D + 6 D = 5 D
21 A + 17 D + 31 A = 35 A
18 D + 16 D + 22 A = 12 D

Sostituiamo ora a A e D i segni (+) e (-):

$$(+12) + (+7) + (-3) = +16$$
$$(+9) + (-8) + (-6) = -5$$
$$(+21) + (-17) + (+31) = +35$$
$$(-18) + (-16) + (+22) = -12$$

Deve assolutamente essere chiara la differenza tra *segno di un numero* e *simbolo dell'operazione*! Laddove ci potrebbe essere un fraintendimento, mettiamo le parentesi. I *segni* sono strettamente legati al numero (*qualità del numero*), mentre che i *simboli delle operazioni* sono al di fuori delle parentesi. Per esprimere questi concetti, si può anche leggere l'ultimo esempio come segue:

diciotto negativo più sedici negativo più ventidue positivo uguale a dodici negativo.

(usare questo modo di esprimersi solo quando si spiega questo esempio)

Riassumendo:

la somma di due *Averi* dà quindi la somma dei due singoli *Averi*

$$(+7) + (+ 5) = +12$$

Nello stesso modo, la somma di due *Debiti* dà la somma dei due singoli *Debiti*

$$(-3) + (-6) = -9$$

La somma di un *Avere* con un *Debito* dà un *Avere* se l'*Avere* è più grande del *Debito*, ed un *Debito* viceversa.

$$(+ 7) + (-3) = +4$$
$$(+2) + (-9) = -7$$

Se sommiamo un Avere con un Debito di pari dimensioni, otteniamo un risultato di qualità particore, cioè il *Nulla*, o espresso in numero, uno *zero*.

$$(+5) + (-5) = 0$$
$$(+11) + (-11) = 0$$
$$(+ 1356) + (-1356) = 0$$

Quindi un *Avere* di ugual dimensione di un *Debito*, sommati danno sempre *zero*. Attraverso questa relazione vengono legati *positivo* e *negativo* uno all'altro. Dello *zero* in sé non possiamo dire se è negativo o positivo; rappresenta il confine che separa le due *qualità*. Un *Avere* è un'entità con *qualità positiva*, mentre un *Debito* è un'entità di *qualità negativa*. *Zero* è *nessuna entità*, quindi non è né *positivo* né *negativo*.

Osserviamo ora la *sottrazione*, quella forma di calcolo che porta all'esistenza di numeri negativi. È chiaro che da un *Avere* posso sottrarre un piccolo *Avere* e rimarrà sempre un *Avere*:

$$(+9) - (+2) = +7$$
$$(+9) - (+5) = +4$$
$$(+9) - (+8) = +1$$

Se però da un'*Avere* tolgo tutto *l'Avere* stesso, si sente la qualità del *vuoto*, del *nulla*.

$$(+9) - (+9) = 0$$

Ma cosa succede se ad un Avere tolgo di più di quanto lui è?

$$(+9) - (+12) = ?$$

Avrò *3 meno di niente*

$$(+9) - (+12) = -3$$

Si può sottrarre ad un numero *negativo* un numero *positivo*?

Se pensiamo al conto bancario, ci è subito chiaro che entriamo ancora di più nei debiti:

$$(-3) - (+5) = -8$$

E cosa succede se sottraiamo un numero negativo? Usando l'esempio dei *Debiti* diventa subito chiaro:

9 D - 5 D = 4 D

$$(-9) - (-5) = -4$$

Particolarmente importante è il caso in cui sottraiamo un *Debito* uguale a quello già esistente:

9 D - 9 D = 0

Se ho un *Debito* con qualcuno, e quella persona decide di stracciare il *Debito*, non avrò di sicuro un *Avere*, ma anche il mio debito non ci sarà più. La persona mi ha fatto un *regalo*. Come calcolo:

$$(-9) - (-9) = 0$$

Se è chiaro che il togliere di un *Debito* corrisponde a fare un *regalo*, allora diventa anche chiaro che sottraendo ad un *Debito* un *Debito* più grande, si otterà un *Avere*:

$$(-9) - (-10) = +1$$
$$(-9) - (-11) = +2$$
$$\vdots$$
$$(-9) - (-15) = +6$$

Anche da un numeo positivo se ne può sottrarre uno negativo

$$(+2) - (-3) = +5$$

Togliere un *Debito* di valore 3 significa regalare tale debito, e quindi l'*Avere* si alza.
Attraverso il prossimo esempio cerchiamo di chiarificare il processo della sottrazione. Sappiamo che *Ugual valo*re meno *Ugual valore* dà *zero*, quindi usando questa conoscenza, procediamo nel seguente modo:

$$(+9) - (+5) = [(+4) + (+5)] - (+5) = (+4) + [(+5) - (+5)] = +4$$

più corto

$$(+9) - (+5) = (+4) + (+5) - (+5) = +4$$

Nello stesso modo possiamo quindi procedere con numeri negativi:

$$(-9) - (-5) = (-4) + (-5) - (-5) = -4$$

Anche per i numeri negativi vale la legge di base: *Ugual valore* meno *Ugual valore* dà *zero.*

Questa suddivisione vale anche per il caso in cui da un Debito piccolo ne viene sottratto uno più grande:

$$(-3) - (-5) = ?$$

Anche in questo caso (-5) deve essere suddiviso come parte del totale (-3). Per fare ciò dobbiamo però utilizzare anche il concetto di Avere. Allora possiamo suddividere il totale (-3) nell'Avere (+2) ed il Debito (-5):

$$(-3) = (+2) + (-5)$$

quindi

$$(-3) - (-5) = (+2) + (-5) - (-5) = +2$$

Lo stesso principio si può utilizzare se togliamo ad una quantità positiva una quantità negativa:

$$(+3) - (-5) = ?$$

Il numero (-5) deve essere visto come parte del totale (+3).
(+3) deve essere suddiviso quindi nel più grande positivo (+8) ed il negativo (-5):

$$(+3) = (+8) + (-5)$$

quindi

$$(+3) - (-5) = (+8) + (-5) - (-5) = +8$$

L'Avere è diventato più grande!!

(Esperimenti con la bilancia)

4. Moltiplicazione e divisione con numeri negativi

Per la moltiplicazione e la divisione di numeri negativi ci riferiamo di nuovo ai calcoli con le parentesi: 3 • 58 può essere calcolato in 2 modi, o 3 • (50 + 8) oppure 3 • (60 - 2).

$3 \cdot 58 = 3 \cdot (50 + 8) = 3 \cdot 50 + 3 \cdot 8 = 150 + 24 = 174$
$3 \cdot 58 = 3 \cdot (60 - 2) = 3 \cdot 50 + 3 \cdot (-2) = 180 - 6 = 174$

Nello stesso modo

$8 \cdot 37 = 8 \cdot (30 + 7) = 8 \cdot 30 + 8 \cdot 7 = 240 + 56 = 296$
$8 \cdot 37 = 8 \cdot (40 - 3) = 8 \cdot 40 + 8 \cdot (-3) = 320 - 24 = 296$

questi calcoli mostrano che 3 • (-2) = -6 e 8 • (-3) = -24 portano al risultato giusto. Si può anche mostrare che 3 • (-2) = -6 perchè 3 • (-2) significa fare (-2) + (-2) + (-2) = -6.

Se facciamo 3 volte di fila il debito di 2 Fr. abbiamo quindi un debito di 6 Fr. Cosa significa però fare (-4) • 9 = ? In base alla legge commutativa
$a \cdot b = b \cdot a$ ci direbbe che non cambia nulla (quindi (-4) • 9 = -36), ma per il momento non abbiamo ancora dimostrato che tale legge vale anche per i numeri negativi. Riferiamoci di nuovo ai calcoli con le parentesi:

26 • 9 = (20 + 6) • 9 = 20 • 9 + 6 • 9 = 180 + 54 = 234
26 • 9 = (30 - 4) • 9 = 30 • 9 + (-4) • 9 = 270 - 36 = 234

Il confronto tra i due risultati rinforza la nostra supposizione:

28 • 23 = (30 - 2) • (20 + 3) = 30 • 20 + 30 • 3 + (-2) • 20 + (-2) • 3 =
= 600 + 90 - 40 - 6 = 644

La stessa moltiplicazione con numeri positivi:

28 • 23 = (20 + 8) • (20 + 3) = 20 • 20 + 20 • 3 + 8 • 20 + 8 • 3 =

= 400 + 60 + 160 + 24 = 644

La nostra supposizione è ulteriormente confermata.

Andiamo quindi ad analizzare il caso più difficile, cioè un numero negativo moltiplica un'altro numero negativo: (-3) • (-4) = ? Nel calcolo con le parentesi questo caso appare nell'esempio:

17 • 26 = (20 - 3) • (30 - 4) = 20 • 30 + 20 • (-4) + (-3) • 30 + (-3) • (-4) =

=600 - 80 - 90 + (-3) • (-4) = 430 + (-3) • (-4)

Calcoliamo solo quella parte di risultato di cui siamo sicuri in base agli esercizi precedenti. Lasciamo aperto cosa dà come risultati (-3) • (-4). Calcoliamo ora lo stesso esempio usando solo numeri positivi:

17 • 26 = (10 + 7) • (20 + 6) = 10 • 20 + 10 • 6 + 7 • 20 + 7 • 6 =

= 200 + 60 + 140 + 42 = 442

Nel primo caso quindi otteniamo il risultato giusto se facciamo

(-3) • (-4) = +12 e quindi 430 + 12 = 442

Altri esempi:

28 • 37 = (30 - 2) • (40 - 3) = 30 • 40 + 30 • (-3) + (-2) • 40 + (-2) • (-3) =

=1200 - 90 - 80 + (-2) • (-3) = 1030 + (-2) • (-3)

a confronto con:

28 • 37 = (20 + 8) • (30 + 7) = 20 • 30 + 20 • 7 + 8 • 30 + 8 • 7 =

=600 + 140 + 240 + 56 = 1036

Di nuovo facendo

(-2) • (-3) = +6

si ottiene nel primo caso il risultato giusto:

1030 + 6 = 1036

Quindi, attraverso lo stesso calcolo fatto prima con numeri negativi e poi con numeri positivi, ci siamo fatti mostrare come "*meno per meno*" deve darmi un numero positivo. La seguente tabella ci mostra in un'altro modo la stessa cosa:

3 • (-4) = -12

2 • (-4) = -8

1 • (-4) = -4

$0 \bullet (-4) = 0$

$(-1) \bullet (-4) = +4$

$(-2) \bullet (-4) = +8$

$(-3) \bullet (-4) = +12$

...

Attraverso la costruzione di questa tabella arriviamo a dire che "*meno per meno da più*". Negli esempi precedenti avevamo:

$+ \bullet + = +$

$+ \bullet - = -$

$- \bullet + = -$

$- \bullet - = +$

Ovviamente questa tabella è da intenderi in maniera simbolica. I Segni non si possono moltiplicare tra di loro. Questa regola si può anche esprimere in un'altra maniera:

se si moltiplicano due numeri con segno uguale, si ottiene un risultato positivo; se si moltiplicano due numeri con segno diverso, si ottiene un risultato negativo.

Verifichiamo questa regola in ulteriori esempi.

Nel capitolo 1 abbiamo fatto la moltiplicazione di parentesi,

per es. $(a + 2)(a + 3) = a^2 + 5a + 6$.

Ad a abbiamo sostituite la serie di numeri naturali 1, 2, 3, ...

Riscriviamo l'inizio di quella tabella:

a	$(a+2)\cdot(a+3)$	a^2+5a+6
1	$(1+2)\cdot(1+3)=3\cdot 4=12$	$1+\ 5+6=12$
2	$(2+2)\cdot(2+3)=4\cdot 5=20$	$4+10+6=20$
3	$(3+2)\cdot(3+3)=5\cdot 6=30$	$9+15+6=30$

Possiamo sostituire ad a numeri negativi? Per esempio a = - 9, poi a = - 8, a = - 7 etc.?

Cosa significa fare $(-9)^2$?

Da quanto visto fin ora, il prodotto di due numeri negativi dà un numero positivo, quindi consideriamo che $(-9)^2 = +81$, e vediamo come si comporta la seguente tabella:

a	$(a+2)\cdot(a+3)$	a^2+5a+6	
-9	$(-9+2)\cdot(-9+3)=(-7)\cdot(-6)=+42$	$81-45+6=+42$	-12
-8	$(-8+2)\cdot(-8+3)=(-6)\cdot(-5)=+30$	$64-40+6=+30$	-10
-7	$(-7+2)\cdot(-7+3)=(-5)\cdot(-4)=+20$	$49-35+6=+20$	-8
-6	$(-6+2)\cdot(-6+3)=(-4)\cdot(-3)=+12$	$36-30+6=+12$	-6
-5	$(-5+2)\cdot(-5+3)=(-3)\cdot(-2)=+6$	$25-25+6=+6$	-4
-4	$(-4+2)\cdot(-4+3)=(-2)\cdot(-1)=+2$	$16-20+6=2$	-2
-3	$(-3+2)\cdot(-3+3)=(-1)\cdot 0=0$	$9-15+6=0$	0
-2	$(-2+2)\cdot(-2+3)=0\cdot 1=0$	$4-10+6=0$	$+2$
-1	$(-1+2)\cdot(-1+3)=1\cdot 2=2$	$1-\ 5+6=2$	$+4$
0	$(0+2)\cdot(0+3)=2\cdot 3=6$	$0+\ 0+6=6$	$+6$
1	$(1+2)\cdot(1+3)=3\cdot 4=12$	$1+\ 5+6=12$	$+8$
2	$(2+2)\cdot(2+3)=4\cdot 5=20$	$4+10+6=20$	$+10$
3	$(3+2)\cdot(3+3)=5\cdot 6=30$	$9+15+6=30$	$+12$
4	$(4+2)\cdot(4+3)=6\cdot 7=42$	$16+20+6=42$	

Sia che il calcolo sia fatto dal prodotto di parentesi (a + 3) (a + 3) o come somma $a^2 + 5a + 6$, otteniamo anche sostituendo ad a numeri negativi, sempre lo stesso risultato.

La tabella con a positive si collega attraverso a = 0 con la tabella con a negative. Questo lo riconosciamo chiaramente osservando gli incrementi. Nella colonna delle a, questo aumenta di +1 ogni riga. I risultati prima decrescono, quindi gli "incrementi" sono negativi, ma gli incrementi stessi (ultima colonna) crescono di 2 per ogni riga. Questi risultati confermano la nostra regola, ed i numeri negativi e positivi sembrano appartenere allo stesso dominio, quello di tutti i numeri.

Ulteriori esperienze possiamo farle con il seguente esempio:

$$(a+5)\cdot(a-3) = a^2 - 3a + 5a - 15 = a^2 + 2a - 15$$
$$(a+2)\cdot(a-5) = a^2 - 5a + 2a - 10 = a^2 - 3a - 10$$
$$(a-3)\cdot(a-4) = a^2 - 4a - 3a + 12 = a^2 - 7a + 12$$

Sostituiamo ad a in sequenza numeri negativi e positivi:

a	$(a+5)\cdot(a-3)$		$a^2+2a-15$		
-7	$(-7+5)\cdot(-7-3) = (-2)\cdot(-10) =$	20	$49 - 14 - 15 =$	20	
-6	$(-6+5)\cdot(-6-3) = (-1)\cdot(-9) =$	9	$36 - 12 - 15 =$	9	-11
-5	$(-5+5)\cdot(-5-3) = 0\cdot(-8) =$	0	$25 - 10 - 15 =$	0	-9
-4	$(-4+5)\cdot(-4-3) = 1\cdot(-7) =$	-7	$16 - 8 - 15 =$	-7	-7
-3	$(-3+5)\cdot(-3-3) = 2\cdot(-6) =$	-12	$9 - 6 - 15 =$	-12	-5
-2	$(-2+5)\cdot(-2-3) = 3\cdot(-5) =$	-15	$4 - 4 - 15 =$	-15	-3
-1	$(-1+5)\cdot(-1-3) = 4\cdot(-4) =$	-16	$1 - 2 - 15 =$	-16	-1
0	$(0+5)\cdot(0-3) = 5\cdot(-3) =$	-15	$0 + 0 - 15 =$	-15	1
1	$(1+5)\cdot(1-3) = 6\cdot(-2) =$	-12	$1 + 2 - 15 =$	-12	3
2	$(2+5)\cdot(2-3) = 7\cdot(-1) =$	-7	$4 + 4 - 15 =$	-7	5
3	$(3+5)\cdot(3-3) = 8\cdot 0 =$	0	$9 + 6 - 15 =$	0	7
4	$(4+5)\cdot(4-3) = 9\cdot 1 =$	9	$16 + 8 - 15 =$	9	9
5	$(5+5)\cdot(5-3) = 10\cdot 2 =$	20	$25 + 10 - 15 =$	20	11

a	$(a+2)\cdot(a-5)$	$a^2-3a-10$	
-4	$(-4+2)\cdot(-4-5)=(-2)\cdot(-9)=18$	$16+12-10=18$	-10
-3	$(-3+2)\cdot(-3-5)=(-1)\cdot(-8)=8$	$9+9-10=8$	-8
-2	$(-2+2)\cdot(-2-5)=0\cdot(-7)=0$	$4+6-10=0$	-6
-1	$(-1+2)\cdot(-1-5)=1\cdot(-6)=-6$	$1+3-10=-6$	-4
0	$(0+2)\cdot(0-5)=2\cdot(-5)=-10$	$0-0-10=-10$	-2
1	$(1+2)\cdot(1-5)=3\cdot(-4)=-12$	$1-3-10=-12$	0
2	$(2+2)\cdot(2-5)=4\cdot(-3)=-12$	$4-6-10=-12$	2
3	$(3+2)\cdot(3-5)=5\cdot(-2)=-10$	$9-9-10=-10$	4
4	$(4+2)\cdot(4-5)=6\cdot(-1)=-6$	$16-12-10=-6$	6
5	$(5+2)\cdot(5-5)=7\cdot 0=0$	$25-15-10=0$	8
6	$(6+2)\cdot(6-5)=8\cdot 1=8$	$36-18-10=8$	10
7	$(7+2)\cdot(7-5)=9\cdot 2=18$	$49-21-10=18$	

(Tabelle 5.3)

a	$(a-3)\cdot(a-4)$	$a^2-7a+12$	
-2	$(-2-3)\cdot(-2-4)=(-5)\cdot(-6)=30$	$4+14+12=30$	-10
-1	$(-1-3)\cdot(-1-4)=(-4)\cdot(-5)=20$	$1+7+12=20$	-8
0	$(0-3)\cdot(0-4)=(-3)\cdot(-4)=12$	$0-0+12=12$	-6
1	$(1-3)\cdot(1-4)=(-2)\cdot(-3)=6$	$1-7+12=6$	-4
2	$(2-3)\cdot(2-4)=(-1)\cdot(-2)=2$	$4-14+12=2$	-2
3	$(3-3)\cdot(3-4)=0\cdot(-1)=0$	$9-21+12=0$	0
4	$(4-3)\cdot(4-4)=1\cdot 0=0$	$16-28+12=0$	2
5	$(5-3)\cdot(5-4)=2\cdot 1=2$	$25-35+12=2$	4
6	$(6-3)\cdot(6-4)=3\cdot 2=6$	$36-42+12=6$	6
7	$(7-3)\cdot(7-4)=4\cdot 3=12$	$49-49+12=12$	8
8	$(8-3)\cdot(8-4)=5\cdot 4=20$	$64-56+12=20$	10
9	$(9-3)\cdot(9-4)=6\cdot 5=30$	$81-63+12=30$	

Anche in queste 3 tabelle appaiono evidenti le relazioni tra i numeri. I risultati appaiono simmetrici.

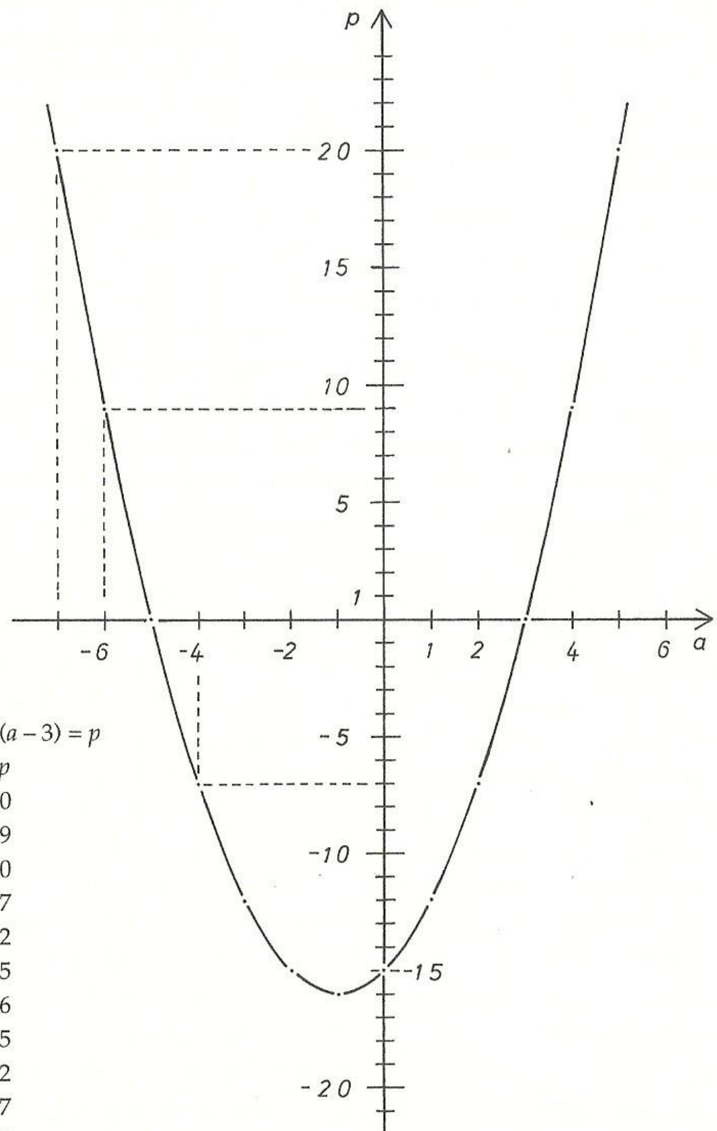
Queste tabelle permettono agli allievi di 7a e 8a classe di esercitare i calcoli.

Nel sistema di coordinate, queste tabelle portano alla parabola, che verrà studiata a partire dalla 11a nell'ambito dell'analisi. In 12a lo studio degli incrementi porterà al calcolo differenziale. Con queste tabelle abbiamo quindi messo un seme che verrà sviluppato negli anni seguenti.

Ma anche gli allievi di 7a ed 8a possono conoscere la curva della parabola.

Come arriviamo alla curva della parabola? Vediamo il secondo esempio

(a + 5) (a - 3) e la relativa tabella.



$(a+5)\cdot(a-3)=p$

a	p
−7	20
−6	9
−5	0
−4	−7
−3	−12
−2	−15
−1	−16
0	−15
1	−12
2	−7
3	0
4	9
5	20

Fig. 5.1

Diciamo che a sono i valori della temperatura, come pure i valori *p* del prodotto p = (a + 5) (a - 3) e li leggiamo su di un termometro verticale ed orizzontale. Le distanze verticali e orizzontali possono essere anche divese.

Ogni coppia di punti a/p si associa ad un punto sul piano geometrico, e constatiamo che disegnando più punti si riconosce una curva. Questa curva scende fino ad un minimo, per poi risalire. Una curva di questo genere viene chiamata parabola. In questo modo rafforziamo l'impressione che i valori della tabella facciano parte di un tutto. Se sbagliamo e disegnamo il punto corrispondente vediamo subito che esce dall'ordine degli altri punti.

Nella seguente figura i punti della scala *p* sono distanziati solo di un quinto rispetto a quelli della scala a. La curva che risulta è sempre una parabola, ma scende e risale in maniera meno ripida rispetto alla curva precedente.

$(a + 5) \cdot (a - 3) = p$

a	p
−7	20
−6	9
−5	0
−4	−7
−3	−12
−2	−15
−1	−16
0	−15
1	−12
2	−7
3	0
4	9
5	20

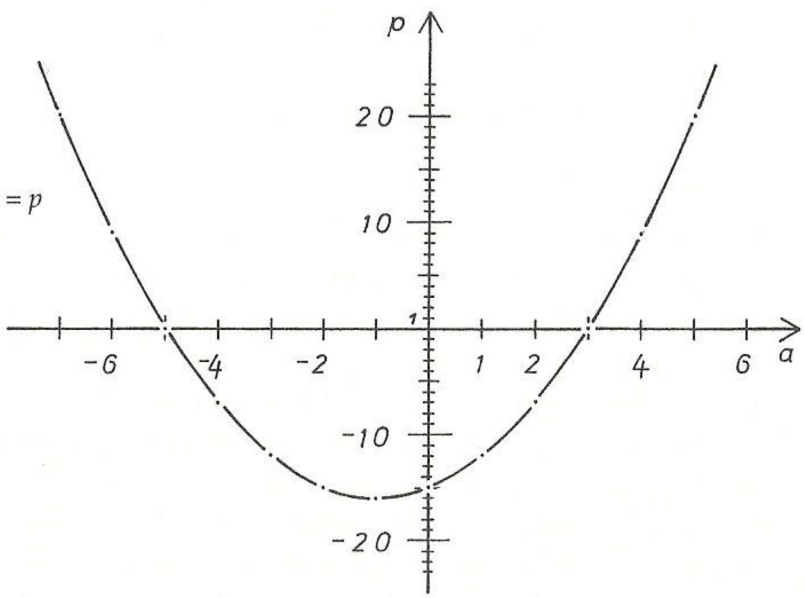


Fig. 5.2

Possiamo ovviamente calcolare per qualsiasi valore intermedio ai valori interi, ottenendo quindi ulteriori punti sempre allineati sulla nostra parabola.

Come continua la curva a destra e sinistra? L'impressione è che continui a salire sempre più ripida. Nelle classi seguenti in cui si conoscerà l'infinito, gli studenti saranno in grado di immaginare come la curva continui, anche se ne possiamo sempre disegnare solo una parte.

Dobbiamo ancora vedere come si comportano i numeri negativi con la divisione. Lo facciamo considerando che la divisione è una delle operazioni inverse della moltiplicazione, quindi:
a : b = c significa dire che b · c = a.

$15 : 3 = 5$	weil	$3 \cdot 5 = 15$
$(-15) : 3 = -5$	weil	$3 \cdot (-5) = -15$
$15 : (-3) = -5$	weil	$(-3) \cdot (-5) = +15$
$(-15) : (-3) = +5$	weil	$(-3) \cdot (+5) = -15$

Quindi le regole dei segni sono:

+ : + = +

- : + = -

+ : - = -

- : - = +

Regola che possiamo formulare nel seguente modo:

Se dividiamo due numeri con segno uguale, il risultato è positivo. Se dividiamo due numeri con segno diverso, il risultato è negativo

Esempi che mostrano che meno per meno è uguale a più

<u>Retta dei numeri</u>

Immaginiamo una retta dei numeri su cui si cammina. Moltiplicare x • y significa fare x passi, e y determina la direzione. Se y è positivo (+1), camminerò verso destra (numeri crescenti). Se y è negativo (-1) camminerò verso sinistra (numeri decrescenti). Se x è positivo, camminerò x passi in avanti, se x è negativo, camminerò x passi in dietro.

Quindi, (-x) • (-y) significa guardare verso sinistra e fare x passi in dietro. Questo mi porterà nella posizione (+x).

<u>Sulla strada</u>

Immaginiamo di trovarci su di una strada e misurare i chilometri verso est come positivi, e quelli verso ovest come negativi. Quindi, se sono sullo zero, una città che si trova ad un km a est sarà nella posizione +1 km, mentre una città due km a ovest sarà nella posizione -2.

Una macchina che viaggia verso est avrà una velocità positiva, mentre che una macchina che viaggia verso ovest avrà una velocità negativa. Quindi, una macchina che viaggia verso est a 100 km/h andrà a +100 km/h, mentre che una che viaggia verso ovest a 100 km/h andrà a -100 km/h.

Questo ha senso visto che se viaggiamo per un ora (+1 ora), la macchina che va verso est si troverà a (+1) • (+100) = +100 km, mentre che la macchina che va ad ovest sarà a (+1) • (-100) = -100 km (= 100 km a ovest).

Ora immaginiamo di venire superati da una macchina che si muove verso est a 100 km/h. Dove si trovava questa macchina un'ora prima? o a -1 ore? basta moltiplicare (-1) • (100) = -100 = 100 km a ovest.

Cosa succede con una macchina che mi supera andando verso ovest? Dove si trovava un ora fa? La sua velocità è -100 km/h ed il tempo è -1 ora, quindi si trovava a (-1) • (-100), e la risposta sarà 100 km a est o +100 km.

es. per i ragazzi

6 + 4 - 3 - (-8) =

15 - (-11) - 32 =

3 • 20 - 5 • 8 =

(- 12) • (-4) + 13 • (-3) =

$5 \cdot (-6) - (-3) \cdot (-9) =$

$(3a + 4) \cdot (2a - 7) =$

$(4a - 1) \cdot (8a - 6) =$

$12a - 15b + 3a - (13a + 21b + 5) =$

$-4a - 7b - 9c + (2a + 3b - 4) - 18 + c =$

8. Equazioni

Le equazioni sono calcoli in cui bisogna calcolare un numero sconosciuto. Risolvere una equazione significa scoprire quel numero sconosciuto. Questo si può fare in due modi: si possono imparare delle regole, seguendo le quali l'equazione viene modificata ed alla fine appare il numero cercato. È utile imparare queste regole, anche se si corre il rischio di far diventare il processo meccanico. Si può evitare questo rischio assicurandosi che gli studenti procedano secondo le regole in modo che le comprendano.

Esiste però un'altro modo per risolvere le equazioni, e cioè a partire dalla confidenza che si è acquisita nel muoversi con i numeri. Se abbiamo per esempio

$$\frac{x}{5} = 9$$

Ci si pone la domanda: quale numero diviso per 5 mi da 9? E la risposta è 45, quindi x = 45.

O se l'equazione è

$$x + 7 = 15$$

non si deve subito trasformare l'equazione, ma l'equazione stessa è la domanda: quale numero sommato a 7 mi da 15? E la risposta la conosciamo subito: x = 8.

In questo modo possiamo risolvere equazioni dalla confidenza che abbiamo nel muoverci con i numeri.

Che domanda pone effettivamente una equazione? prendiamo per esempio

$$5x = 20$$

Che numero moltiplicato per 5 mi da 20? Otteniamo subito la risposta:

x = 4

se

$$\frac{18}{x} = 6$$

Per che numero dobbiamo dividere 18 per ottenere 6? Naturalmente 3, quindi x = 3

Se siamo coscienti che domanda ci pone l'equazione, viviamo coi nostri pensieri dentro l'equazione e non la modifichiamo semplicemente secondo delle regole. Le equazioni diventano in questo modo per approfondire ulteriormente il calcolo con i numeri.

Equazioni più difficili devono ovviamente essere risolte attraverso trasformazioni. Se pratichiamo però questo primo metodo, allora le trasformazioni possono essere comprese bene. In queste classi pratichiamo prima il metodo descritto sopra, e andiamo poi lentamente verso il metodo delle trasformazioni.

Come primo passo, esprimiamo le equazioni agli studenti verbalmente, in modo che il calcolo viene in primo piano. Per esempio, il maestro può dire "qual'è quel numero che sommato ad 8 mi da 17?" Esempi del genere si possono fare tutto il tempo. Gli esercizi verbali possono diventare più difficile mano a mano che si prendono numeri più grandi.

Penso ad un numero:

se gli sommo 4, ottengo 21 (17)

" " " " " 6, " " 31 (25)

" " " " " 8, " " 19 (11)

" " " " " 17, " " 31 (14)

"   "   "   "   " 23,   "   " 45 (22)

"   "   "   "   " 28,   "   " 53 (25)

Con numeri piccoli, lo studente non deve fare calcoli coscienti, il risultato gli viene semplicemente. Con numeri più grandi, arriva il pensiero: "se al numero pensato aggiunge 28 ottiene 53, quindi devo sottrarre 28 a 53". L'addizione di 28 deve essere fatta al contrario, quindi: 53 - 28 = 25.

Si può anche sottrarre un numero da un altro numero pensato:

Penso ad un numero

se gli sottraggo 5 ottengo 18 (23)

"   "   "   "   "   9 "   "   " 12 (21)

"   "   "   "   " 13   "   " "15 (28)

"   "   "   "   " 16 "   "   " 21 (37)

"   "   "   "   "   22 "   " " 43 (65)

"   "   "   "   "   33   "   " "59 (92)

Per ottenere il numero pensato, devo fare la sottrazione attraverso una somma, 59 + 33 = 92

Si possono anche pensare esempi con numeri negativi:

Penso ad un numero

se gli aggiungo 8, ottengo 3 (-5)

"   "   "   "   " "10, "   "   7 (-3)

"   "   "   "   " "25, "   "   19 (-6)

"   "   "   "   " "35, "   "   0 (-35)

" " " " " "7, " " -2 (-9)

" " " " " "15, " " -14 (-29)

penso ad un numero

se gli sottraggo 8, ottengo -2 (6)

" " " " " 12, " " -11 (1)

" " " " " 14, " " -6 (8)

" " " " " 3, " " -12 (-9)

" " " " " 15, " " -19 (-4)

" " " " " 21, " " -30 (-9)

Si possono anche pensare numeri con più operazioni: penso ad un numero, se lo moltiplico per 3 e gli aggiungo 5, ottengo 17. Lo studente deve fare 2 operazioni, addizione e moltiplicazione:

17 - 5 = 12

12 : 3 = 4

Possiamo dimostrare che 4 è effettivamente il numero pensato, svolgendo il calcolo:

3 • 4 +5 = 12 + 5 = 17

Otteniamo il risultato precedentemente indicato, quindi 4 è il numero pensato.

Penso ad un numero:

se lo moltiplico per 4 e aggiungo 2, ottengo 14 (3)

se lo moltiplico per 2 e aggiungo 7, ottengo 19 (6)

se lo moltiplico per cinque e aggiungo 13, ottengo 53 (8)

53 - 13 = 40

40 : 5 = 8

Prova: 5 • 8 + 13 = 53

penso ad un numero;

se lo moltiplico per 3 e gli tolgo 8, ottengo 7 (5)

se lo moltiplico per quattro e gli tolgo 7, ottengo 25 (8)

se lo moltiplico per 2 e gli tolgo 12, ottengo 24 (18)

24 + 12 = 36

36 : 2 = 18

prova: 2 • 18 - 12 = 24

Esempi con frazioni

Penso ad un numero;

se alla sua metà aggiuno 6, ottengo 10 (8)

se alla sua metà aggiungo 7, ottengo 19 (24)

se alla sua metà aggiungo 10, ottengo 27 (34)

27 + 10 = 17

2 • 17 = 34

Prova: 34 : 2 + 10 = 27

Penso ad un numero;

se ad un terzo del numero aggiungo 6, ottengo 10 (12)

se ad un terzo del numero aggiungo 8, ottengo 19 (18)

Se ad un terzo del numero aggiungo 15, ottengo 25 (30)

25 - 15 = 10

3 • 10 = 30

prova: 30 : 3 + 15 = 25

penso ad un numero;

se ad un quarto del numero tolgo 2, ottengo 5 (28)

se ad un quarto del numero tolgo 3, ottengo 7 (40)

se ad un quarto del numero tolgo 10, ottengo 11 (84)

11 + 10 = 21

4 • 21 = 84

prova: 84 : 4 - 10 = 11

Questo tipo di calcolo mentale col tempo può essere risolto anche dagli studenti più deboli, e dovrebbe antecedere al calcolo con le trasformazioni. Si può anche fare in modo che i ragazzi pongano loro dei problemi del genere alla classe. Con calcoli più difficili, nasce automaticamente l'esigenza di scrivere il calcolo.

Penso ad un numero. Se lo moltiplico per 7 e gli aggiungo 31, ottengo 73. Il numero pensato è sconosciuto. Lo chiamo *incognita* e lo rappresento dal simbolo x.

$7x + 31 = 73$

$7x = 42$

$x = 6$

Prima di dare le regole per lo svolgimento dell'equazione, è meglio fare dei ragionamenti. Se 7x + 31 è uguale a 73, allora 7x deve essere 31 di meno, quindi 73 - 31 = 42. Se 7 volte x è uguale a 42, allora x è semplicemente un settimo di 42, quindi 42 : 7 = 6 = x. Questo tipo di ragionamento va fatto se vogliamo risolvere verbalmente il calcolo.

Si può ora passare ad una soluzione più formale del calcolo:

$7x + 31 = 73 \quad | -31$

$7x = 42 \qquad | :7$

$x = 6$

Dopo l'equazione, si fa una libea verticale e si scrive che si vuole sottrarre *da entrambe le parti dell'uguale* il numero 31. Per la parte sinistra, significa che si sottrae semplicemente il valore precedentemente aggiunto, quindi

$7x + 31 - 31 = 7x.$

Ma il risultato di questa sottrazione (7x) si scrive una riga più in basso. A destra invece bisogna fare la sottrazione 73 - 31; il risultato viene anche scritto una riga più in basso. Se sottraiamo da entrambe le parti di un uguale la stessa cifra di 31, allora entrambe le parti diventano più piccole nella stessa misura, questo significa che la parte sinistra rimane uguale alla parte destra.

Dopo la seconda riga, facciamo ancora una linea verticale e scriviamo che abbiamo deciso di dividere entrambi le parti per 7; la parte sinistra, divisa per sette, mi da 7x : 7 = 1x = x; la parte destra: 42 : 7 = 6. I risultati di questa divisione vengono scritti una riga più in basso. E questa terza riga mi dice che il risultato, il numero pensato, l'incognita è 6. Ci chiediamo se il risultato ottenuto è giusto. Possiamo dimostrarlo facilmente: inseriamo al posto dell'incognita, il numero 6 e calcoliamo:

$7 \cdot 6 + 31 \overset{?}{=} 73$

$42 + 31 = 73$

c.v.d.!

Sopra l'uguale nella prima riga, mettiamo un punto di domanda, visto che questa riga esprime una domanda: $7 \cdot 6 + 31$ è uguale a 73? La seconda riga da la risposta: si, $42 + 31 = 73$.

Un secondo esempio: penso ad un numero; se lo moltiplico per 12 e poi sottraggo 23, ottengo 61.

$12x - 23 = 61$

Prima ragionando: se $12x - 23$ è uguale a 61, allora $12x$ dev'essere uguale a 84. Se dodici volte x è uguale a 84, allora x deve essere uguale a 7.

Espresso come equazione:

$12x - 23 = 61 \quad | + 23$

$12\,x = 84 \qquad | : 12$

$x = 7$

Attraverso il primo calcolo (+ 23), sul lato sinistro dell'uguale facciamo l'inverso di quanto fatto all'inizio: $12x - 23 + 23 = 12x$; sul lato destro aumentiamo 61 di 23 per ottenere 84. Per ottenere x, dividiamo entrambe le parti per 12.

Parte sinistra: $12x : 12 = x$

Parte destra: $84 : 12 = 7$

Dimostriamo inserendo nella prima riga 7 al posto di x:

$12 \cdot 7 - 23 \stackrel{?}{=} 61$

$84 - 23 = 61$

c.v.d.!

Terzo esempio: penso ad un numero; se ad un quinto del numero sottraggo 6, ottengo 9.

$$\frac{x}{5} - 6 = 9$$

Prima riflettiamo: $\frac{x}{5}$ deve fare 15, perchè 15 - 6 = 9. x deve essere 5 volte più grande, quindi 75.

$$\frac{x}{5} - 6 = 9 \quad | + 6$$

$$\frac{x}{5} = 15 \quad | \bullet 5$$

x = 75

L'incognita la otteniamo facendo l'inverso delle operazioni date all'inizio.

$$\frac{75}{5} - 6 \stackrel{?}{=} 9$$

15 - 6 = 9

c.v.d.!

In questo esempi, l'incognita appariva solo da una parte dell'uguale. Ovviamente può apparire da entrambe le parti.

penso ad un numero; se la moltiplico per 5 e aggiungo 18, ottengo il suo valore moltiplicato per 8.

5x + 18 = 8x

Alla destra dell'uguale ci sono 3x di più che alla sinistra. Questa eccedenza di 3x deve essere uguale a 18, quindi x = 6. Per mettere in evidenza questa eccedenza, dividiamo 8x in 5x + 3x.

$5x + 18 = 5x + 3x$

Visto che i 5x a sinistra ed a destra dell'uguale devono essere uguali, ne deriva che 3x deve essere uguale a 18.

$18 = 3x \quad |: 3$

$6 = x$

(L'incognita x può ovviamente trovarsi alla fine a sinistra o a destra dell'uguale).

L'eccedenza diventa evidente, se togliamo da ogni parte dell'uguale 5x:

Sinistra: $5x + 18 - 5x = 18$

Destra: $8x - 5x = 3x$

O, scritto in maniera più concisa:

$5x + 18 = 8x \quad | - 5x$

$18 = 3x \qquad | : 3$

$6 = x$

Per concludere, facciamo la verifica:

$5 \cdot 6 + 18 =^{?} 8 \cdot 6$

$30 + 18 = 48$

$48 = 48$

c.v.d.!

Risolviamo equazioni con comprensione, se riconosciamo le eccedenze, e se riconosciamo come si equalizzano.

Penso ad un numero; se la moltiplico per 7 e poi aggiungo 8, ottengo lo stesso valore come se lo moltiplico per 3 e gli aggiungo 28:

$7x + 8 = 3x + 28$

A sinistra c'è un'eccedenza di 4x; a destra il numero conosciuto (28) eccede quello di sinistra (8) di 20. Queste due eccedenze devono essere uguali:

$4x = 20$

$x = 5$

Scomponendo 7x in 3x + 4x e 28 in 20 + 8, le eccedenze diventa evidenti:

$3x + 4x + 8 = 3x + 20 + 8$

Otteniamo queste eccedenze, se togliamo da entrambe le parti 3x; nello stesso modo, togliamo il numero più piccolo (8).

$7x + 8 = 3x + 28 \quad | - 3x$

$4x + 8 = +28 \quad | - 8$

$4x + 8 = 20 \quad | : 4$

$x = 5$

Questo ultimo modo di risolvere l'equazione, lo definiamo *trasformazione*. Dovrà diventare una routine! Dopo molte esercitazioni di questo genere, non ci pensiamo più molto. Questo è lo svantaggio delle routine - ma anche il vantaggio: la forza del pensiero può essere orientata ad altro.

Esempio:

$5x + 56 = 7x + 40$

Abbiamo a destra un'eccedenza di 2x, ed a sinistra un'eccedenza di 16, quindi

$16 = 2x$

$8 = x$

Soluzione con la sottrazione:

$5x + 56 = 7x + 40 \quad | -5x$

$56 = 2x + 40 \quad | -40$

$16 = 2x \quad | :2$

$8 = x$

Si può anche invertire l'ordine delle sottrazioni:

$5x + 56 = 7x + 40 \quad | -40$

$5x + 16 = 7x \quad | -5x$

$16 = 2x \quad | :2$

$8 = x$

Verifica:

$5 \bullet 8 + 56 \stackrel{?}{=} 7 \bullet 8 + 40$

$40 + 56 = 56 + 40$

$96 = 96$

c.v.d.!

Penso ad un numero. Se lo moltiplico per 10 e poi sottraggo 9, ottengo lo stesso numero come se lo moltiplico per 6 e gli sommo 27.

$10x - 9 = 6x + 27$

Eccedenze? 4x nella sinistra, 36 nella destra, quindi

$4x = 36$

$x = 9$

Soluzione con trasformazioni:

$10x - 9 = 6x + 27b \quad | - 6x$

$4x - 9 = 27 \quad | +9$

$4x = 36$

$x = 9$

Penso ad un numero; se lo moltiplico per 8 e poi sottraggo 30, ottengo lo stesso valore che se lo moltiplico per 5 e sottraggo 12

$8x - 30 = 5x - 12$

Eccedenze: 3x nella sinistra, 18 nella destra:

$3x = 18$

$x = 6$

Soluzione usando le trasformazioni:

$8x - 30 = 5x - 12 \quad | - 5x$

$3x - 30 = -12 \quad | + 30$

$3x = 18 \quad | : 3$

$x = 6$

Verifica:

$8 \cdot 6 - 30 =^{?} 5 \cdot 6 - 12$

$48 - 30 = 30 - 12$

$18 = 18$

c.v.d.!

Gli esempi visti fin qui erano fatti in modo che il risultato è sempre un numero intero positivo. I ragazzi devono prendere confidenza con questo tipo di esempi.

Se in un'equazione troviamo da una parte dell'uguale più numeri o valori di x, allora dobbiamo prima mettere insieme tali valori simili:

$18 + 5x + 17 = 2x + 3 + 11x$ | mettere insieme

$35 + 5x = 13x + 3$ | $- 5x$

$35 = 8x + 3$ | $- 3$

$32 = 8x$ | $: 8$

$4 = x$

Verifica:

$18 + 20 + 17 =^{?} 8 + 3 + 44$

$55 = 55$

c.v.d.!

$63 + 4x - 21 = 15x + 28 - 4x$ | mettere insieme

$42 + 4x = 11x + 28$ | $- 4x$

$42 = 7x + 28$ | $- 28$

$14 = 7x$ | $: 7$

$2 = x$

Verifica:

$63 + 8 - 21 =^{?} 30 + 28 - 8$

$50 = 50$

c.v.d.!

Equazioni come sono state svolte fino ad ora, determinano esattamente 1 valore che risolve l'equazione.

Ci sono anche equazioni che possono essere risolte *da ogni numero*, per esempio:

$5(x + 7) = 5x + 35$

ad x si può sostituire qualsiasi numero. L'equazione è sempre soddisfatta.

Un esempio di questo tipo è il teorema del binomio:

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

La parte sinistra dell'uguale è sempre uguale alla parte destra, indipendentemente da quale valore assegniamo ad x. Questo tipo di espressioni vengono definite *identità*; entrambe le parti sono identiche (per ogni numero, non per uno in particolare). Questo fatto viene espresso esteticamente usando il simbolo di *equivalenza*, un uguale a 3 linee:

$$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

Ed esiste un terzo tipo di equazione, :

$5x + 2 = 5x$

Questa espressione si chiama *contraddizione*, perchè non può esistere un numero x che soddisfa l'equazione; 5x + 2 sarà sempre più grande di 5x. Dobbiamo quindi scrivere:

$5x + 2 > 5x$

Il simbolo > si legge: *maggiore di*. Espressioni di questo tipo si definiscono *disequazioni*. In questo caso si può inserire qualsiasi valore al posto di x. La disequazione è soddisfatta per ogni valore di x.

Non si può quindi inventare qualsiasi equazione e pensare che si tratti sempre di una equazione definita. Potrebbe anche trattarsi di una Identità o di una contraddizione.

Esercizi:

1. $5x + 6 = 3x + 14$
2. $7x + 11 = 2x + 21$
3. $9x + 2 = 7x + 12$
4. $3x + 21 = x + 39$
5. $10x + 14 = 3x + 21$
6. $15x + 11 = 9x + 53$
7. $2x + 3 + 8x = 3x + 18 + 4x$
8. $5x + 17 + 3x = 2x + 35 + 3x$
9. $7x + 21 + 2x = 5x + 41 + 2x$
10. $13 + 4x + 17 = 21 + 3x + 15$
11. $7 + 5x + 16 = 3 + 2x + 29$
12. $2x + 5 + 8x = 7 + 6x + 14$
13. $3x - 2 = x + 8$
14. $5x - 6 = 2x + 15$
15. $6x - 11 = 2x + 21$
16. $8x - 24 = 5x + 9$
17. $9x - 4 = 2x + 10$
18. $21x - 14 = 15x + 16$
19. $15x + 3 - 6x = 16x + 7 - 9x$
20. $21x + 6 - 17x = 15x + 16 - 13x$
21. $32x + 11 - 28x = 17x + 22 - 14x$
22. $18 + 13x - 7 = 25 + 10x - 2$
23. $31 + 17x - 21 = 16 + 14x + 12$
24. $25 + 24x - 21 = 17x + 40 + 3x$
25. $5x - 3 = 7x - 7$
26. $11x - 21 = 18x - 49$
27. $13x - 15 = 15x - 29$
28. $15x - 3 = 20x - 58$
29. $5x - 6 = 18 - 3x$
30. $8x - 10 = 90 - 12x$
31. $14x + 7 - 11x = 6x - 35 + 18x$
32. $21x - 9 - 5x = 2x + 21 + 8x$
33. $42x - 18 - 36x = 21x - 114 + 9x$
34. $15x + 21 - 7x = 13 + 6x + 32$
35. $13x - 12 + 5x = 7x + 48 - 9x$
36. $7x - 8 + 2x = 8x + 32 - 9x$
37. $2x - 7 = 9x - 35$
38. $11x - 21 = 9 - 4x$
39. $7x + 6 = 3x + 26$
40. $18x + 5 = 12x + 11$
41. $9x + 11 = 5x + 23$
42. $6x + 58 = 13x + 9$
43. $3x + 7 + 8x = 11 + 5x + 8$
44. $5x + 70 - 2x = 11 + 8x + 44$
45. $21x + 7 - 15x = 8x + 15 - 4x$
46. $8 + 14x + 6 = 3x + 34 + 9x$
47. $40 + 7x - 15 = 8x + 35 - 3x$
48. $100 + 17x - 45 = 8x + 59 + 7x$

9. Equazioni con frazioni

Già equazioni molto semplici portano a risultati frazionari:

$$\begin{aligned} 7x + 10 &= 4x + 11 \quad &| -4x \\ 3x + 10 &= 11 \quad &| -10 \\ 3x &= 1 \end{aligned}$$

L'ultima equazioni pone una domanda: quale numero moltiplicato per 3 mi da il risultato di 1? Questa è la domanda base delle frazioni: non si moltiplicano unità, ma si dividono! Questo porta alla comprensione di 1/3: quel numero che moltiplicato per 3 mi da 1. Se si pone la domanda: cos`è 1/2, 1/3, 1/4, ...? Sono quei numeri che presi 2 volte, 3 volte, 4 volte, ... mi danno l'unità. L'equazione sopra mi da quindi come risultato

$$x = \frac{1}{3}$$

E cosa significa 2/3? Chiaramente 2/3 = 1/3 + 1/3. Se si prende questa frazione 3 volte, si ottengono 2 unità, quindi 2. Si deve quindi comprendere in questo modo ogni frazione: 3/5 è quella quantità, che se presa 5 volte (moltiplicata per 5) mi dà il numero 3. È la soluzione dell'equazione:

$$\begin{aligned} 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Quando abbiamo un'equazione qualsiasi con numeri interi, otteniamo attraverso le trasformazioni la forma:

ax = b

dove a e b sono numeri interi. Questa equazione pone la domanda: che numero moltiplicato con a mi da b? Questo è quindi la frazione b/a. È la soluzione dell'equazione fatta sopra.

È meglio prima comprendere il significato delle frazioni, e poi procedere alla trasformazione, che in questo caso consiste nel dividere entrambe le parti dell'equazione per a:

ax = b | : a

Parte sinistra divisa per a; ax:a = 1x = x

Parte destra divisa per a; $b : a = \frac{b}{a}$

Esempi di equazioni con risultati frazionali:

1. esempio

$$\begin{aligned} 8x + 4 &= 3x + 5 && | -3x \\ 5x + 4 &= 5 && | -4 \\ 5x &= 1 && | :5 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La verifica dà la possibilità di esercitare il calcolo con le frazioni: nella prima equazione sostituiamo 1/5 a x:

$$8 \cdot \frac{1}{5} + 4 \stackrel{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{5} + 5$$
$$\frac{8}{5} + 4 = \frac{3}{5} + 5$$
$$1\,3/5 + 4 = 5\,3/5$$
$$5\,3/5 = 5\,3/5$$
$$\surd$$

il risultato 5 3/5 significa 5 + 3/5

2. esempio

$$\begin{aligned} 9x - 3 &= 5x + 2 \quad &| -5x \\ 4x - 3 &= 2 \quad &| +3 \\ 4x &= 5 \quad &| :4 \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Verifica:

$$9 \cdot \frac{5}{4} - 3 \stackrel{?}{=} 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$
$$\frac{45}{4} - 3 = \frac{25}{4} + 2$$
$$11\tfrac{1}{4} - 3 = 6\tfrac{1}{4} + 2$$
$$8\tfrac{1}{4} = 8\tfrac{1}{4}$$
$$\surd$$

Riguardo alla verifica, il punto di domanda dovrebbe trovarsi sopra l'uguale di ogni passaggio, perchè solo all'ultimo passaggio si vede che entrambe le parti dell'uguale sono veramente uguali, quando sostituiamo a x il numero trovato.

3. esempio

$$
\begin{aligned}
10x - 11 &= 3x - 2 && \mid -3x \\
7x - 11 &= -2 && \mid +11 \\
7x &= 9 && \mid :7 \\
x &= \frac{9}{7}
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$10 \cdot \frac{9}{7} - 11 \stackrel{?}{=} 3 \cdot \frac{9}{7} - 2$$

$$\frac{90}{7} - 11 = \frac{27}{7} - 2$$

$$12\tfrac{6}{7} - 11 = 3\tfrac{6}{7} - 2$$

$$1\tfrac{6}{7} = 1\tfrac{6}{7}$$

$$\surd$$

Si poteva scrivere il risultato 9/7 come 1 2/7. Inserendo questo termine nella prima riga:

$$10 \cdot 1\tfrac{2}{7} - 11 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 1\tfrac{2}{7} - 2$$

$$10\tfrac{20}{7} - 11 = 3\tfrac{6}{7} - 2$$

$$12\tfrac{6}{7} - 11 = 1\tfrac{6}{7}$$

$$1\tfrac{6}{7} = 1\tfrac{6}{7}$$

$$\surd$$

La verifica è più facile da eseguire con la frazione 9/7. È però utile esercitarsi con entrambe le rappresentazioni.

4. esempio

$$x + \frac{3}{4} = 6$$

Quale numero, sommato a 3/4 dà 6? Partiamo da 6 e togliamo 3/4 = 5 1/4. Scritto con le trasformazioni:

$$x + \frac{3}{4} = 6 \qquad | -\frac{3}{4}$$
$$x = 5\,\tfrac{1}{4}$$

5. esempio

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \qquad | -\frac{2}{3}$$
$$x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{9}{12} - \frac{8}{12}$$
$$x = \frac{1}{12}$$

Verifica:

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{12} + \frac{8}{12} \overset{?}{=} \frac{3}{4}$$
$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\checkmark$$

6. esempio:

$$2x - \frac{3}{5} = 1 \qquad | +\frac{3}{5}$$
$$2x = 1 + \frac{3}{5}$$
$$2x = \frac{8}{5} \qquad | :2$$
$$x = \frac{4}{5}$$

Verifica:

$$2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\surd$$

7. esempio

$$3x - \frac{1}{4} = 1 \quad \Big| + \frac{1}{4}$$

$$3x = 1 + \frac{1}{4}$$

$$3x = \frac{5}{4} \quad \Big| : 3$$

$$x = \frac{5}{12}$$

Verifica:

$$3 \cdot \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\surd$$

Come calcoliamo 3 • 5/12? Possiamo moltiplicare il numeratore per 3 e poi semplificare per 3: 3 • 5/12 = 15/12 = 5/4. È però più facile semplificare 3 e 12 prima della moltiplicazione: $\cancel{3}^{1} \cdot 5/\cancel{12}_{4} = 5/4$

8. esempio:

$$5x + \frac{2}{3} = 3x + \frac{4}{5} \quad | -3x$$

$$2x + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \quad | -\frac{2}{3}$$

$$2x = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \quad | \text{ gln. m.}$$

$$2x = \frac{12}{15} - \frac{10}{15}$$

$$2x = \frac{2}{15} \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{15}$$

Verifica:

$$5 \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\underset{\checkmark}{1 = 1}$$

Calcoliamo:

$$\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{1}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{1}{3} \qquad \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{1}{5}$$

Questo tipo di equazioni sono un'ottima occasione per ripetere il calcolo con le frazioni.

9. esempio:

$$5x - \frac{3}{4} = 3x + \frac{1}{5} \qquad | -3x$$

$$2x - \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \qquad | +\frac{3}{4}$$

$$2x = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$2x = \frac{4}{20} + \frac{15}{20}$$

$$2x = \frac{19}{20} \qquad | :2$$

$$x = \frac{19}{40}$$

Verifica:

$$5 \cdot \frac{19}{40} - \frac{3}{4} \stackrel{?}{=} 3 \cdot \frac{19}{40} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{19}{8} - \frac{6}{8} \stackrel{?}{=} \frac{57}{40} + \frac{8}{40}$$

$$\frac{13}{8} \stackrel{?}{=} \frac{65}{40}$$

$$\frac{13}{8} \underset{\surd}{=} \frac{13}{8}$$

Anche frazioni dell'incognita possono apparire:

10. esempio:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6$$

Per fare in modo che la trasformazione non diventi un procedimento meccanico, facciamo prima ancora un ragionamento: x/3 deve essere uguale a 4, perchè 4 + 2 = 6; x deve essere 12, perchè 12 : 3 = 4.

Soluzione attraverso la trasformazione:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6 \qquad | -2$$

$$\frac{x}{3} = 4 \qquad | \cdot 3$$

$$x = 12$$

11. esempio:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad | + \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad | \text{ gln.m.}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{4} \qquad | \cdot 3$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Verifica:

$$\frac{\frac{9}{4}}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$

$$\frac{\frac{9}{4}}{3} = ?$$

Una frazione di questo genere si chiama doppia frazione. Significa:

$$\frac{9}{4} : 3 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

12. esempio:

$$\frac{3x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \qquad \Big| + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{9}{10} \qquad | : 3$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{10} \qquad | \cdot 2$$

$$x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Verifica: $$\frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2} - \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

Possiamo imparare a non spaventarci davanti ad una costruzione di numeri di questo genere. Riflettiamo:

$$3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

quindi:

$$\frac{\frac{9}{5}}{2} - \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

La prossima riflessione è

$$\frac{\frac{9}{5}}{2} = \frac{9}{5} : 2 = \frac{9}{10}$$

Perchè una frazione viene divisa per un numero intero, dividendo il numeratore per questo numero (se si può fare) o si moltiplica il denominatore con la frazione corrispondente.

Quindi:

$$\frac{9}{10} - \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{10} \underset{\checkmark}{=} \frac{1}{2}$$

La verifica da la possibilità di acquisire confidenza a fare questo tipo di calcoli. Si ottiene così soddisfazione quando la verifica quadra. Veniamo confermati nel nostro operare.

Seguono equazioni con frazioni che portano a risultati interi.

13. esempio:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14 \qquad | \text{ gln.m.}$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} = 14$$

$$\frac{7x}{12} = 14 \qquad | :7$$

$$\frac{x}{12} = 2 \qquad | \cdot 12$$

$$x = 24$$

Verifica:

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{4} \stackrel{?}{=} 14$$

$$8 + 6 = 14 \quad \checkmark$$

14. esempio:

$$\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = 17 \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{8x}{12} + \frac{9x}{12} = 17 \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{17x}{12} = 17 \qquad | :17$$

$$\frac{x}{12} = 1 \qquad | \cdot 12$$

$$x = 12$$

Verifica:

$$\frac{2 \cdot 12}{3} + \frac{3 \cdot 12}{4} \stackrel{?}{=} 17$$

$$8 + 9 = 17 \quad \checkmark$$

15. esempio:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{3x+3}{6} + \frac{2x+8}{6} = 6$$

$$\frac{5x+11}{6} = 6 \qquad | \cdot 6$$

$$5\,x + 11 = 36 \qquad | -11$$

$$5\,x = 25 \qquad | :5$$

$$x = 5$$

Verifica:

$$\frac{5+1}{2} + \frac{5+4}{3} \stackrel{?}{=} 6$$

$$\frac{6}{2} + \frac{9}{3} = 6$$

$$3 + 3 = 6$$

$$\surd$$

Nelle 2 equazioni della prima riga c'è una somma di fattori; bisogna procedere come segue:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{3 \cdot 2} = \frac{3x+3}{6}$$

$$\frac{x+4}{3} = \frac{2 \cdot (x+4)}{2 \cdot 3} = \frac{2x+8}{6}$$

16. esempio:

$$\frac{2x+5}{5} + \frac{3x-7}{2} = 7 \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{4x+10}{10} + \frac{15x-35}{10} = 7$$

$$\frac{19x-25}{10} = 7 \qquad | \cdot 10$$

$$19x - 25 = 70 \qquad | +25$$

$$19x = 95 \qquad | : 19$$

$$x = 5$$

Verifica:

$$\frac{2 \cdot 5 + 5}{5} + \frac{3 \cdot 5 - 7}{2} \stackrel{?}{=} 7$$

$$\frac{15}{5} + \frac{8}{2} \stackrel{?}{=} 7$$

$$3 + 4 \underset{\surd}{=} 7$$

17. esempio

$$\frac{5x + 9}{4} - \frac{7x + 3}{6} = 2 \qquad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{15x + 27}{12} - \frac{14x + 6}{12} = 2 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$\frac{x + 21}{12} = 2 \qquad | \cdot 12$$

$$x + 21 = 24 \qquad | - 21$$

$$x = 3$$

Verifica:

$$\frac{5 \cdot 3 + 9}{4} - \frac{7 \cdot 3 + 3}{6} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{24}{4} - \frac{24}{6} = 2$$

$$6 - 4 \underset{\surd}{=} 2$$

In questo esempio bisogna fare attenzione che ogni sommando della frazione và sottratto. La linea di frazione funziona come una parentesi, ed il segno meno quindi vale per entrambi i fattori.

18. esempio:

$$\frac{3x-6}{2}-\frac{2x+3}{3}=1 \quad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{9x-18}{6}-\frac{4x+6}{6}=1 \quad | \text{ z. f.}$$

$$\frac{5x-24}{6}=1 \quad | \cdot 6$$

$$5x-24=6 \quad | +24$$

$$5x=30 \quad | :5$$

$$x=6$$

Verifica:

$$\frac{3\cdot 6-6}{2}-\frac{2\cdot 6+3}{3}\overset{?}{=}1$$

$$\frac{12}{2}-\frac{15}{3}\overset{?}{=}1$$

$$6-5\underset{\checkmark}{=}1$$

Nell'esempio seguente c'è una differenza nel numeratore. Dobbiamo fare quindi particolare attenzione al fatto che la linea frazionaria ha la stessa funzione di una parentesi.

19. esempio:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x-3}{4}=2 \quad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{8x+4}{20}-\frac{5x-15}{20}=2 \quad | \text{ z. f.}$$

$$\frac{8x+4-(5x-15)}{20}=2$$

$$\frac{3x+19}{20}=2 \quad | \cdot 20$$

$$3x+19=40 \quad | -19$$

$$3x=21 \quad | :3$$

$$x=7$$

Verifica:

$$\frac{2\cdot 7+1}{5}-\frac{7-3}{4}\stackrel{?}{=}2$$

$$\frac{15}{5}-\frac{4}{4}=2$$

$$3-1\underset{\checkmark}{=}2$$

A cosa dobbiamo fare attenzione? Al secondo numero del secondo numeratore (-15) che và anche sottratto, e che quindi bisogna calcolare 4 - (-15) = 19. Questo è un posto dove si possono facilmente fare errori.

20. esempio:

$$\frac{11x-1}{2}-\frac{7x-2}{5}=4 \quad | \text{ gln. m.}$$

$$\frac{55x-5}{10}-\frac{14x-4}{10}=4 \quad | \text{ z. f.}$$

$$\frac{55x-5-(14x-4)}{10}=4$$

$$\frac{41x-1}{10}=4 \quad | \cdot 10$$

$$41x-1=40 \quad | +1$$

$$41x=41 \quad | :41$$

$$x=1$$

Verifica:

$$\frac{11\cdot 1-1}{2}-\frac{7\cdot 1-2}{5}\overset{?}{=}4$$

$$\frac{10}{2}-\frac{5}{5}=4$$

$$5-1\underset{\checkmark}{=}4$$

Il calcolo a cui bisogna prestare particolare attenzione è - 5 -(-4) = -1

Tutti gli esempio mostrati fino ad ora possono essere anche risolti in una maniera più corta: si può moltiplicare l'equazione in maniera tale per cui tutti i denominatori scompaiano. In questo modo, già nella seconda riga non appaiono più frazioni. Se si vuole solo calcolare il valore di x, questo secondo modo è il più adatto. Ma se risolviamo equazioni in classe, c'è una domanda più importante che il valore di x, e cioè cosa imparano gli studenti da quello che fanno. E se gli facciamo risolvere le equazione attraverso l'espansione, si esercitano anche nel calcolo con le frazioni. E questo è un vantaggio. Quando gli studenti hanno acquisito fiducia con le frazioni, possiamo mostrare loro l'altro modo di risoluzione, in modo che le frazioni scompaiano in fretta. È più elegante, ma può divenire facilmente un'azione meccanica. Mostriamo il metodo su esempi già risolti.

4. esempio:

$$x + \frac{3}{4} = 6 \qquad | \cdot 4$$

$$4x + 3 = 24 \qquad | -3$$

$$4x = 21 \qquad | :4$$

$$x = 5\,\tfrac{1}{4}$$

Verifica:

$$5\,\tfrac{1}{4} + \frac{3}{4} = 6 \quad \checkmark$$

5. esempio:

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

Possiamo moltiplicare per 12:

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad | \cdot 12$$

$$12 \cdot x + 12 \cdot \frac{2}{3} = 12 \cdot \frac{3}{4}$$

$$12x + 8 = 9 \quad | -8$$

$$12x = 1 \quad | : 12$$

$$x = \frac{1}{12}$$

Verifica: :

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{8}{12} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

Come moltiplichiamo le frazioni per un numero intero, per esempio 12 • 2/3 e 12 • 3/4? Il fattore 12 può essere diviso sia per 3 che per 4. Questo facilita il calcolo:

$$^{4}\cancel{12} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_{1}} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ und } ^{3}\cancel{12} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{1}} = 9$$

8. esempio

el: $$5x + \frac{2}{3} = 3x + \frac{4}{5} \qquad | \cdot 15$$

$$15 \cdot 5x + 15 \cdot \frac{2}{3} = 15 \cdot 3\,x + 15 \cdot \frac{4}{5}$$

$$75x + 10 = 45\,x + 12 \qquad | -45x - 10$$

$$30x = 2 \qquad | : 30$$

$$x = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Verifica:

$$5 \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$1 = 1$$

$$\checkmark$$

9. esempio:

l: $$5x - \frac{3}{4} = 3x + \frac{1}{5} \qquad | \cdot 20$$

$$20 \cdot 5x - 20 \cdot \frac{3}{4} = 20 \cdot 3x + 20 \cdot \frac{1}{5}$$

$$100x - 15 = 60x + 4 \qquad | -60x + 15$$

$$40x = 19 \qquad | : 40$$

$$x = \frac{19}{40}$$

10. esempio:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6 \qquad | \cdot 3$$

$$x + 6 = 18 \qquad | - 6$$

$$x = 12$$

Dopo un po di esempi, non scriviamo più il fattore (3) davanti ad ogni termine, ma solo dietro la riga di operazione, e ci immaginiamo che ogni termine viene moltiplicato per 3. Nella prossima riga scriviamo già il risultato della moltiplicazione.

11. esempio

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad | \cdot 12$$

Ogni termine deve essere moltiplicato per 12, e facciamo questo calcolo mentalmente per ogni termine.

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad | \cdot 12$$

$$4x - 6 = 3 \qquad | + 6$$

$$4x = 9 \qquad | : 4$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Conviene ripetere questo tipo di esercizio molte volte finchè diventa immediatamente chiaro quale è il numero per cui si deve moltiplicare per semplificare.

12. esempio:

$$\frac{3x}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{2} \qquad | \cdot 10$$

(ci immaginiamo: 10/2 = 5, 10/5 = 2, 10/2 = 5, quindi moltiplichiamo il primo numeratore per 5, il secondo per 2 ed il terzo per 5)

$$\frac{3x}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{2} \qquad | \cdot 10$$

$$15x-4=5 \qquad | +4$$

$$15x=9 \qquad | :15$$

$$x=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

13. esempio:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14 \qquad | \cdot 12$$

(riconosciamo che dobbiamo moltiplicare il primo numeratore per 4 ed il secondo per 3)

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14 \qquad | \cdot 12$$

$$4x+3x=12\cdot 14$$

$$7x=12\cdot 14 \qquad | :7$$

$$x=12\cdot 2$$

$$x=24$$

Ovviamente possiamo moltiplicare 12 • 14 (168). Ma è più facile dividere 12 • 14 per 7, invece che 168. Applichiamo la regola: un prodotto viene diviso, in modo che si divide solo un fattore. 14 è più facilmente divisibile per 7 che 168.

14. esempio:

$$\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = 17 \qquad | \cdot 12$$

$$8x + 9x = 12 \cdot 17$$

$$17x = 12 \cdot 17 \qquad | : 17$$

$$x = 12$$

15. esempi

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \qquad | \cdot 6$$

Nel pensiero costruiamo i fattori per i quali bisogna moltiplicare il numeratore: 3 e 2. La linea frazionaria ha di nuovo la funzione di una parentesi: entrambi i sommandi vanno moltiplicati.

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \qquad | \cdot 6$$

$$3x + 3 + 2x + 8 = 36 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$5x + 11 = 36 \qquad | -11$$

$$5x = 25 \qquad | : 5$$

$$x = 5$$

16. esempio:

$$\frac{2x+5}{5} + \frac{3x-7}{2} = 7 \qquad | \cdot 10$$

$$4x + 10 + 15x - 35 = 70 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$19x - 25 = 70 \qquad | +25$$

$$19x = 95 \qquad | : 19$$

$$x = 5$$

17. esempio:

$$\frac{5x+9}{4} - \frac{7x+3}{6} = 2 \qquad | \cdot 12$$

$$3 \cdot (5x+9) - 2 \cdot (7x+3) = 24 \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$15x + 27 - 14x - 6 = 24 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$x + 21 = 24 \qquad | -21$$

$$x = 3$$

Per precauzione abbiamo messo entrambi i sommandi in una parentesi. In questo modo non corriamo il rischio di fare errori con le moltiplicazioni ed i segni.

18. esempio:

$$\frac{3x-6}{2}-\frac{2x+3}{3}=1 \qquad | \cdot 6$$

$$3\cdot(3x-6)-2\cdot(2x+3)=6 \qquad | \text{ a. m.}$$

$$9x-18-4x-6=6 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$5x-24=6 \qquad | +24$$

$$5x=30 \qquad | :5$$

$$x=6$$

19. esempio:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x-3}{4}=2 \qquad | \cdot 20$$

$$4\cdot(2x+1)-5\cdot(x-3)=40 \qquad | \text{ a. m.}$$

$$8x+4-5x+15=40 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$3x+19=40 \qquad | -19$$

$$3x=21 \qquad | :3$$

$$x=7$$

20. esempio:

$$\frac{11x-1}{2}-\frac{7x-2}{5}=4 \qquad | \cdot 10$$

$$5\cdot(11x-1)-2\cdot(7x-2)=40 \qquad | \text{ a. m.}$$

$$55x-5-14x+4=40 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$41x-1=40 \qquad | +1$$

$$41x=41 \qquad | :41$$

$$x=1$$

Risolviamo infine ancora alcuni esempi che non abbiamo risolto in precedenza.

21. esempio:

$$\frac{2x}{3}+\frac{5}{12}=\frac{5x}{6}+\frac{1}{4} \qquad | \cdot 12$$

$$8x+5=10x+3 \qquad | -8x-3$$

$$2=2x \qquad | :2$$

$$1=x$$

Verifica:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\stackrel{?}{=}\frac{5}{6}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{12}+\frac{5}{12}=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}$$

$$\frac{13}{12}\underset{\surd}{=}\frac{13}{12}$$

22. esempio:

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{2}=\frac{x-2}{4}+15 \qquad | \cdot 20$$

$$4x+30x=5x-10+300 \qquad | \text{ z. f.}$$

$$34x=5x+290 \qquad | -5x$$

$$29x=290 \qquad | :29$$

$$x=10$$

Verifica:

$$\frac{10}{5}+\frac{30}{2}\stackrel{?}{=}\frac{8}{4}+15$$

$$2+15\underset{\surd}{=}2+15$$

23. esempio:

ispiel: $\frac{2x+7}{3}+\frac{3x-5}{4}=\frac{3x+1}{2} \qquad | \cdot 12$

$$
\begin{aligned}
4\cdot(2x+7)+3\cdot(3x-5) &= 6\cdot(3x+1) && |\ \text{a. m.}\\
8x+28+9x-15 &= 18x+6 && |\ \text{z. f.}\\
17x+13 &= 18x+6 && |\ -17x-6\\
7 &= x
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\cdot7+7}{3}+\frac{3\cdot7-5}{4} &\overset{?}{=} \frac{3\cdot7+1}{2}\\
\frac{21}{3}+\frac{16}{4} &= \frac{22}{2}\\
7+4 &\underset{\checkmark}{=} 11
\end{aligned}
$$

24. esempio:

spiel: $\frac{3x-2}{5}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+2}{6} \qquad | \cdot 30$

$$
\begin{aligned}
6\cdot(3x-2)-10\cdot(x-1) &= 5\cdot(x+2) && |\ \text{a. m.}\\
18x-12-10x+10 &= 5x+10 && |\ \text{z. f.}\\
8x-2 &= 5x+10 && |\ -5x+2\\
3x &= 12 && |\ :3\\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Verifica:

$$
\begin{aligned}
\frac{3\cdot4-2}{5}-\frac{4-1}{3} &\overset{?}{=} \frac{4+2}{6}\\
\frac{10}{5}-\frac{3}{3} &\overset{?}{=} \frac{6}{6}\\
2-1 &\underset{\checkmark}{=} 1
\end{aligned}
$$

Esercizi per il capitolo 9:

1. Equazioni con numeri interi e risultati frazionari

1. $5x + 3 = 2x + 10$
2. $6x + 5 = 4x + 16$
3. $8x + 4 = 3x + 8$
4. $11x + 1 = 5x + 2$
5. $10x + 3 = 3x + 7$
6. $8x + 11 = 3x + 12$
7. $9x + 3 = 5x + 6$
8. $10x + 8 = 7x + 10$
9. $13x + 5 = 9x + 6$
10. $12x + 3 = 4x + 6$
11. $2x + 7 = 5x + 3$
12. $5x - 3 = 2x + 4$
13. $31x - 17 = 28x + 3$
14. $8x - 9 = 3x + 2$
15. $13x - 2 = 7x + 1$
16. $24x - 6 = 20x + 1$
17. $5x - 7 = 1 - 2x$
18. $3x - 1 = 7 - 2x$
19. $3x - 5 = 2 - 5x$
20. $4x - 2 = 4 - 5x$

2. Equazioni con frazioni e risultati interi

1. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4} = 6$
2. $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{5x}{4} = 33$
3. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{5} = 14$
4. $\dfrac{5x}{2} + \dfrac{3x}{5} = 93$
5. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 20$
6. $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{4x}{3} = 17$
7. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x}{3} = 7$
8. $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x}{3} = 22$
9. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3x}{7} = 13$
10. $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5x}{2} = 19$

11. $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+6}{5}=4$

12. $\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+10}{5}=5$

13. $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x+7}{7}=7$

14. $\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x+7}{6}=5$

15. $\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+4}{3}=5$

16. $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+10}{5}=6$

17. $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x+8}{5}=8$

18. $\dfrac{2x+5}{3}+\dfrac{3x+1}{4}=9$

19. $\dfrac{3x+2}{2}-\dfrac{5x-1}{3}=1$

20. $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{5x-3}{3}=1$

21. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{4}+7$

22. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6}=\dfrac{x}{5}+14$

23. $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{5x}{6}=\dfrac{3x}{2}-16$

24. $\dfrac{x}{3}+2x=\dfrac{x}{4}+50$

25. $\dfrac{2x}{3}+x=\dfrac{3x}{4}+11$

26. $\dfrac{x}{5}+18=\dfrac{x}{10}+x$

27. $\dfrac{3x}{5}+21=\dfrac{7x}{10}+2x$

28. $\dfrac{x+1}{2}+3=\dfrac{x+3}{3}+x$

29. $\dfrac{x+2}{4}+x=\dfrac{x+3}{3}+5$

30. $\dfrac{3x+1}{2}+1=\dfrac{2x+3}{3}+x$

3. Equazioni con frazioni e risultati frazionari

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x=1$
2. $\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+x=4$
3. $\frac{3}{4}+x=\frac{15}{8}-2x$
4. $\frac{3}{8}+6x=\frac{5}{4}-x$
5. $\frac{5}{6}+2x=\frac{11}{12}+x$
6. $\frac{3}{7}+5x=\frac{9}{14}+2x$
7. $\frac{1}{3}+x=\frac{5}{6}-x$
8. $\frac{2}{3}+x=\frac{3}{2}-x$

10. Dal prodotto alla potenza

Osserviamo ora come normali moltiplicazioni di numeri portano a prodotti.

Esempi:

$6 = 3 \cdot 2$ $\quad$ $12 = 3 \cdot 4$ $\quad$ $2 = 2 \cdot 1$

Vi sono anche prodotti che possiedono più di 2 fattori:

$12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$ $\quad$ $20 = 2 \cdot 5 \cdot 2$ $\quad$ $720 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

Tra questi prodotti, ve ne sono alcuni con fattori uguali, come per esempio

$$64 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6} \qquad 81 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4} \qquad 36 = \underbrace{6 \cdot 6}_{2}$$

In casi di questo genere, contiamo i fattori e creiamo una potenza. Il fattore che viene sommato lo chiamiamo *la base*, mentre che il numero di volte che lo sommiamo lo chiamiamo *esponente*. Esso indica quante volte appare lo stesso fattore. I 3 esempi vengono rappresentati quindi in questo modo:

$64 = 2^6$ $\quad$ $81 = 3^4$ $\quad$ $36 = 6^2$

Il fatto che la base e l'esponente non vengano scritti alla stessa altezza si motiva nel modo seguente: confrontiamo 2^3 e 3^2, e vediamo subito che le due potenze non rappresentano lo stesso numero:

$2^3 = 8$ e $3^2 = 9$

Base ed esponente non possono quindi in generale essere scambiati. Per questa ragione si scrivono ad altezza diversa.

Possiamo quindi dare una forma generale alle potenze:

$P_1 = a \bullet b$

Ci sono però anche prodotti multipli

$P_2 = a \bullet b \bullet c$

Tra i prodotti multipli, ve ne sono alcuni in cui tutti i fattori sono uguali. Se per esempio abbiamo 2 fattori uguali,

$$P_3 = \underbrace{a \cdot a}_{2}$$

allora li contiamo, e scriviamo

$P_3 = a^2$

Se un prodotto ha 3 moltiplicandi uguali, scriviamo

$$P_4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3}$$

Scritto come potenza:

$P_4 = a^3$

Se abbiamo quindi un numero indefinito n di fattori uguali,

$$P = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .....a}_{n}$$

Scriviamo

$P = a^n$

Definiamo ancora che $a^1 = a$ e che $a^0 = 1$

Esercizi:

1. Rappresenta i numeri 64, 128, 256, 6561, 10000 in diversi modi come potenze

2. Cerca numeri tra 0 e 30 che puoi rappresentare come somme o differenze di 2 quadrati. Trovi tra questi anche numeri quadratici?

3. Cerca dei numeri tra 0 e 30 che puoi rappresentare come somme o differenze di numeri cubici. Trovi tra questi anche numeri cubici?

4. Nomi particolari delle potenze di 10. Si definisce 10^1 dieci, 10^2 cento, 10^3 mille, 10^6 milione, 10^9 miliardo (attenzione, in inglese si chiama "billion"), 10^{12} bilione (attenzione, in inglese "trillion"), 10^{15} biliardo, 10^{18} trilione, 10^{21} triliardo, e cosi via. Per una lettura più facile, con numeri grandi si mettono punti, virgole, o apostrofi ogni 3 cifre.

Leggi le cifre 111.222.333; 444.333.222.111, 9.876.543.210, 12.345.678.987.654.321

5. Numeri grossi si rappresentano spesso nelle scienze come potenze di 10. Quindi, per esempio 912436752 ~ $9 \bullet 10^8$, oppure, per essere più precisi,

$9.1 \cdot 10^8$. Rappresenta i numeri dell'esercizio precedente in questa maniera.

Soluzioni

1. $64 = 64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$;

$128 = 2^7$

$256 = 4^4 = 2^8$

$6561 = 81^2 = 9^4 = 3^8$

$10.000 = 100^2 = 10^4$

2.

$7 = 4^2 - 3^2$;

$8 = 2^2 + 2^2 = 2^3$;

$9 = 0^2 + 3^2 = 5^2 - 4^2$;

$10 = 1^2 + 3^2$;

$11 = 6^2 - 5^2$;

$13 = 2^2 + 3^2 = 7^2 - 6^2$;

$15 = 8^2 - 7^2$;

$16 = 0^2 + 4^2$;

$17 = 1^2 + 4^2 = 9^2 - 8^2$;

$18 = 3^2 + 3^2$;

$19 = 10^2 - 9^2$;

$20 = 2^2 + 4^2 = 6^2 - 4^2$;

$21 = 11^2 - 10^2$;

$23 = 12^2 - 11^2$;

$24 = 5^2 - 1^2$;

$25 = 3^2 + 4^2 = 13^2 - 12^2$;

$26 = 5^2 + 1^2$;

$27 = 14^2 - 13^2 = 3^3$;

$29 = 15^2 - 14^2$;

3. Senza l'utilizzo dello zero, si ottiene:

$7 = 2^3 - 1^3$;

$9 = 3^2 = 2^3 + 1^3$;

$19 = 3^3 - 2^3$;

$26 = 3^3 - 1^3$;

$28 = 3^3 + 1^3$;

10.1 Regole delle potenze

Prima legge delle potenze

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$$

Potenze con base uguale a possono essere moltiplicate sommando gli esponenti

Seconda legge delle potenze

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Potenze con base uguale a possono essere divise facendo la sottrazione degli esponenti

Terza legge delle potenze

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$$

Potenze con basi diverse ed esponente n uguale, possono essere moltiplicate elevando a n il prodotto delle basi

Quarta legge delle potenze

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenze con basi diverse ed esponente n uguale, possono essere divise elevando a n il quoziente delle basi

Attenzione: *la potenza di una somma o di una differenze, è in generale diversa dalla somma o dalla differenza delle potenze dei singoli sommandi:*

$(a + b)^n \neq a^n + b^n$ oppure $(a - b)^n \neq a^n - b^n$

Esempi:

$(2 + 3)^2 = 5^2 = 2^5 \neq 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
$(5 - 3)^2 = 2^2 = 4 \neq 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

Cosa significa quindi a^1? Dalla terza legge delle potenze, possiamo derivare:

$$a^1 = a^{3-2} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$$

In parole: la prima potenza di tutti i numeri $a \neq 0$ vale a.

Cosa significa a^0?
Analogamente possiamo costruire a^0 come a^{2-2}, e otteniamo:

$$a^0 = a^{2-2} = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$$

In parole: la potenza nulla di tutti i numeri $a \neq 0$ vale 1.

Vale inoltre che tutte le potenze di 1 valgono 1: $1^n = 1$ *per tutti i numeri n.*

Esercizi:

1. Calcola: 2^1, 1^2, 2^3, 3^2, 2^4, 4^2, 2^5, 5^2, 2^6, 6^2.

2. Rappresenta i numer 64, 81 e 1024 nel massimo numero di modi possibili come potena

3. Per cosa bisogna moltiplicare 5^{12}, per ottenere 10^{12}?

4. Calcola: $\left(\frac{1}{2}\right)^4; \left(\frac{2}{3}\right)^3; \left(\frac{3}{4}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^1; \left(\frac{5}{6}\right)^0;$

5. Calcola: $\frac{8^3}{4^3}; \frac{15^2}{5^2}; \frac{12^4}{6^4}; \frac{7^3}{21^3}; \frac{9^2}{27^2}; \frac{a^5}{a^2}; \frac{a^2}{a^5};$

Soluzioni:

1. 2, 1, 8, 9, 16, 16, 32, 25, 64, 36.

2. $64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$; $81^1 = 9^2 = 3^4$; $1024^1 = 32^2 = 4^5 = 2^{10}$.

3. 2^{12}, perchè $5^{12} \bullet 2^{12} = (5 \bullet 2)^{12} = 10^{12}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}; \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}; \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}; \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1;$

5. $\frac{8^3}{4^3} = \left(\frac{8}{4}\right)^3 = 2^3 = 8; \textit{rispettivamente} \frac{15^2}{5^2} = 3^2 = 9; \frac{12^4}{6^4} = 2^4 = 16;$

$\frac{7^3}{21^3} = \frac{1}{27}; \frac{9^2}{27^2} = \frac{1}{9}; \frac{a^5}{a^2} = a^3; \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3};$