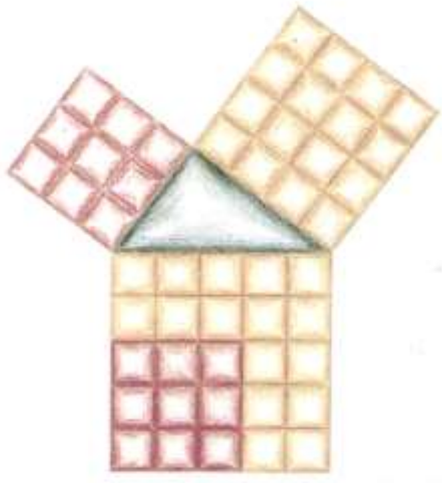
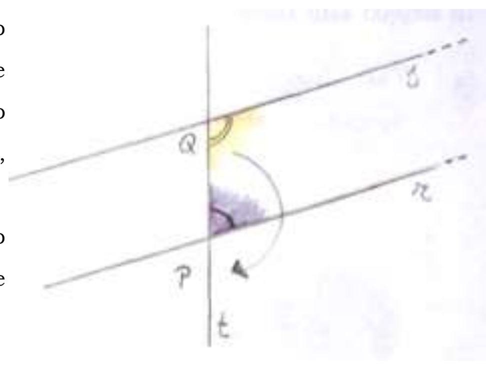
Teorema di Pitagora

Sandro Galli

Stefano Russo



Dedicato ai maestri delle classi medie



Dal disegno (il terzo della serie) sembra elle l'angolo spostato da *Q* a *P* si sovrapponga esattamente all'angolo in *P* in posizione "esterno-destra*. Se questo è vero, allora i due angoli sono supplementari, completano assieme un angolo piatto.

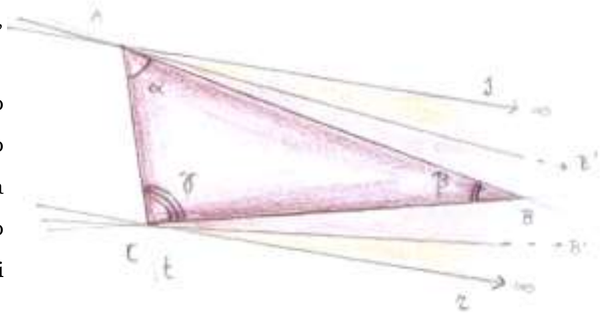
Questa proprietà, suggerita da un disegno ben fatto, ***è*** vera, ed è vera esclusivamente se le rette sono parallele.

ESERCIZIO. Nei libri di geometria si legge questa affermazione: "In una coppia di parallele tagliate da una trasversale angoli alterni-interni (o alterni esterni) sono congruenti*. Cosa significa?

Triangoli.

In pratica, per quanto ci sforziamo di disegnare due rette esattamente parallele, esse più verosimilmente finiscono per incontrarsi se prolungate da una delle due parti; se siamo molto precisi questo punto di intersezione è molto lontano, un punto remoto sperduto a grande distanza dalla trasversale.

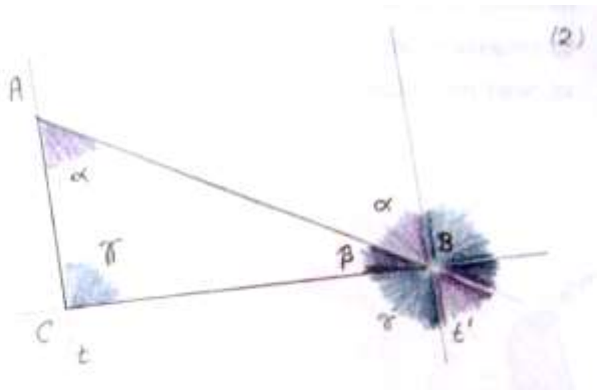
Mentre idealmente due rette parallele "non si incontrano mai", in pratica possiamo sperare di disegnarle cosi bene che si incontrino solo a grande distanza, in un punto remoto.) ^



Ora avviciniamo questo punto remoto alla trasversale *t* fino a farlo entrare nel campo della figura: le due rette convergono sempre più decisamente e poi compare il triangolo

A BC. In questo processo i due angoli interni-destra si sono trasformati in a e y, che insieme sembrano dare un angolo minore di un angolo piato. D'altra parte nel disegno è comparso il punto *B* con il proprio angolo, p.

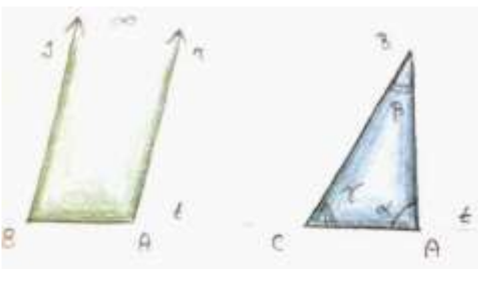
Disegniamo una retta parallela a *t* che passi per fi. Ora abbiamo una coppia di parallele, t e f\ tagliate da due trasversali, *AB* e *CB:* cosi in *B* si formano angoli congruenti ad a e y.



Così facendo abbiamo trasportato tutti e tre gli angoli in fi, uno dopo l'altro: ora sono adiacenti ed **è** evidente che insieme formano un angolo piatto.

Quindi a e y insieme danno meno di un angolo piatto: per completarli dovremmo ancora aggiungere p.

Da questo punto di vista possiamo pensare a due parallele tagliate da una



trasversale come ad un triangolo molto particolare: la sua base è sulla trasversale e i due lati si incontrano in un punto speciale, che si trova *al di là di ogni punto remoto;* questo vertice è un punto all'infinito ed il simbolo "co" (che è proprio quello che sembra: un "8" molto stanco che si è coricato a riposare) rappresenta l'infinito. Gli angoli alla base di questo triangolo speciale sono supplementari e l'angolo all'infinito è nullo.

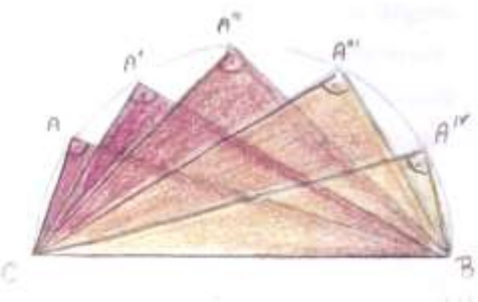
In un triangolo normale tutti e tre gli angoli sono diversi dall'angolo nullo e la loro somma è un angolo piatto: questa è una conseguenza della proprietà delle parallele.

Tra tutti i triangoli che possiamo immaginare vi sono i triangoli rettangoli: su di essi e sulle loro proprietà si costruisce la geometria del piano.

Triangoli rettangoli.

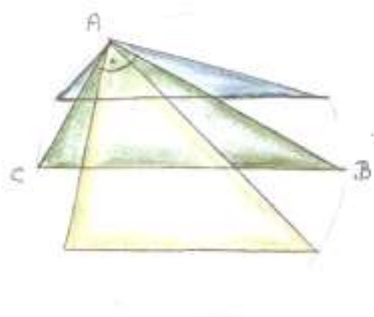
Disegnarne- una semicirconferenza con diametro *BC* ; sulla semicirconferenza scegliamo una successione di punti *A, A', A'', A'''* e *A''''*; uniamo ciascuno di questi punti ai punti fl e C ed otteniamo una successione di triangoli con base in comune *BC.*

Oltre alla base questi cinque triangoli, nonché tutti quelli costruiti nello stesso modo, condividono una proprietà fondamentale:



l'angolo sulla semicirconferenza è retto.

Questa proprietà deriva abbastanza rapidamente dalla proprietà delle rette parallele e quindi può essere dimostrata; d'altra parte per capire ciò che segue è sufficiente averne preso atto. La sua dimostrazione è dovuta a Talete e per questo motivo ci si riferisce alla costruzione che ho descritto con le parole "semicirconferenza di Talete".

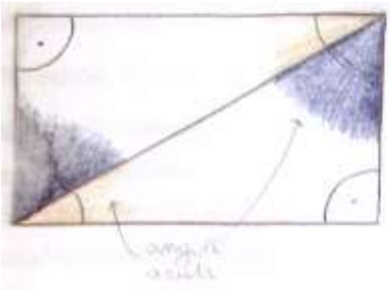


Consideriamo la questione da un altro punto di vista; in una circonferenza scegliamo un punto *A* e disegnamo una successione di triangoli. Quando la base del triangolo è una corda posta, rispetto al centro, dalla stessa parte di *A,* l'angolo in *A* è ottuso; se la corda si trova dalla parte opposta l'angolo è acuto. Solo se la base del triangolo coincide con il diametro l'angolo in *A* è retto.

I triangoli nei quali uno dei tre angoli è retto sono chiamati *rettangoli.*

DOMANDA. Esistono triangoli con due angoli retti? E con tre?

Se disegnamo un rettangolo e tracciamo una delle sue diagonali lo dividiamo in due triangoli rettangoli congruenti.,In questo disegno la diagonale può essere considerata una trasversale e ogni coppia di lati opposti è una coppia di parallele, quindi gli angoli che si formano sono congruenti due a due.J cj.cW-v jwuooto



In questo disegno la diagonale può essere considerata una trasversale e ogni coppia di lati opposti è una coppia di parallele, quindi gli angoli che si formano sono congruenti due a due. Vediamo così che i due angoli acuti di un triangolo rettangolo formano insieme un angolo retto (in una parola: sono *complementari).* Possiamo renderci conto che le cose stanno così anche ricordando che i tre angoli interni di un triangolo danno insieme un angolo piatto, ossia due angoli retti e dal momento che uno dei tre angoli è retto...

Il lato maggiore di un triangolo rettangolo, quello opposto all'angolo retto, si chiama *ipotenusa,* gli altri due, che includono l'angolo retto, si chiamano *cateti.*

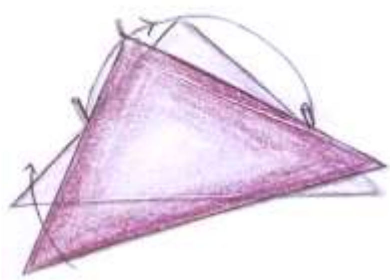
Possiamo disegnare questi triangoli appoggiandoli su uno dei due cateti usando una normale squadra da disegno (che è essa stessa un triangolo rettangolo), oppure scegliendo come base l'ipotenusa: in questo caso lo strumento per realizzare l'angolo retto è la semicirconferenza di Tale te.

ESERCIZIO. Disegnate un triangolo rettangolo a piacere con l'ipotenusa alla base. Siete liberi di scegliere le misure di tutti e tre i lati? (Suggerimento: cominciate dalla misura dell'ipotenusa).

Spesso gli allievi confondono il cateto maggiore con l'ipotenusa quando essa si trova alla base.

Un compasso molto speciale.

Piantiamo nel terreno due paletti ad una distanza pari al diametro della circonferenza che vogliamo tracciare e procuriamoci una squadra sufficientemente grande, (insinuiamo l'angolo retto tra i due paletti) fino a quando essi toccano i due cateti; ora muoviamo la squadra mantenendo entrambi i cateti a contatto con i paletti: il vertice corrispondente all'angolo retto si muove lungo una semicirconferenza con il diametro fissato.



DOMANDA. Come facciamo a tracciare la circonferenza intera?

Mentre il *teorema di Talete* dice che tutti i triangoli con base sul diametro di una semicirconferenza e vertice sulla stessa sono rettangoli, qui vediamo che tutti i triangoli rettangoli con base sul diametro hanno il vertice opposto sulla semicirconfereza. Possiamo chiamare questa affermazione *teorema inverso di Talete.*

Il ruolo dei triangoli rettangoli.

Esiste nella geometria del piano un legame profondo tra misure angolari, da una parte, e misure di lunghezze e superfici dall'altra. I triangoli rettangoli sono la chiave per decifrare questo mistero.

VERSO IL TEOREMA DI PITAGORA

Immagino abbiate un'idea sul teorema di Pitagora. Nello studio della geometria ci si preoccupa di solito di enunciarlo, dimostrarlo, applicarlo.

Se però ci proponiamo di condurre alla sua scoperta, o riscoperta, dobbiamo proporre un itinerario plausibile che lo renda interessante ed evidente.

Questo è anche l'obbiettivo di un'epoca di geometria. Alla scoperta di questo teorema potranno seguire la dimostrazione e le applicazioni, ma solo in un secondo tempo.

Ecco qui un possibile itinerario.

Disegnamo anzitutto un quadrato. Cosa possiamo fare per costruire un quadrato di superficie doppia? Solitamente chi si accosta la prima volta a questo problema comincia disegnando un quadrato di lato doppio.

Così ci troviamo però di fronte ad un risultato diverso da quello che ci aspettavamo: un quadrato di superficie quadrupla rispetto a quello di partenza, composto di quattro quadrati congruenti al quadrato originale.

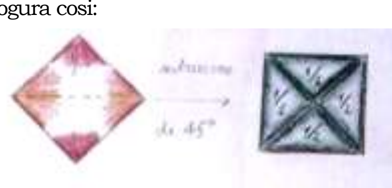
Se abbiamo creduto alla soluzione di raddoppiare il lato, probabilmente ora stiamo annaspando, e potremmo essere tentati di affiancare solo due quadrati, come qui a fianco, in effetti l'area raddoppia, ma cambia anche la forma, ora abbiamo un rettangolo.

Che fare, allora? Dato che replicando la forma del quadrato non otteniamo il risultato desiderato, possiamo provare a scomporre la sua superficie in parti più piccole da ricomporre diversamente.

Se disegno la diagonale del quadrato ottengo due triangoli congruenti, due "metà" del quadrato originale. Studiamo più da vicino i triangoli cosi ottenuti.

Vediamo subito che qui abbiamo un triangolo isoscele, e quindi i due angoli acuti sono congruenti, e dato che il terzo è un angolo retto sono pari alla metà di un angolo retto. Questo è un triangolo rettangolo isoscele.^Se ricompongo le due tessere del mosaico i due angoli retti danno un angolo piatto, e due angoli acuti sono adiacenti e danno un angolo retto. Così abbiamo di nuovo una figura con tre lati, ed è un triangolo rettangolo isoscele equivalente al quadrato (equivalente significa che ha la stessa superficie).

Ora raddoppiamo la fiogura cosi:

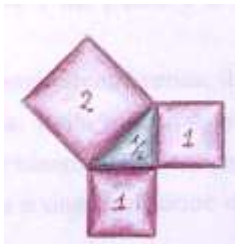


come prima gli angoli acuti adiacenti si sommano e danno un angolo retto, così abbiamo una nuova figura con quattro lati congruenti e quattro angoli retti - un quadrato! - ed è chiaro che la sua superficie è il doppio della superficie del quadrato di partenza.

Abbiamo così risolto il problema posto in apertura e possiamo riassumere il risultato con queste parole:

> *Il quadrato costruito sulla diagonale di un qualsiasi quadrato assegnato ha superficie doppia rispetto a questo.*

Vogliamo ora spingerci oltre. Per questo rappresentiamo in un solo disegno quanto abbiamo visto: il quadrato originale è al centro, due copie sono disegnate su altrettanti lati e il quadrato doppio è disegnato sulla diagonale. È meglio eliminare metà delquadrato centrale ed ottenere unafigura più semplice, con un triangolo rettangoloisoscele al centro.

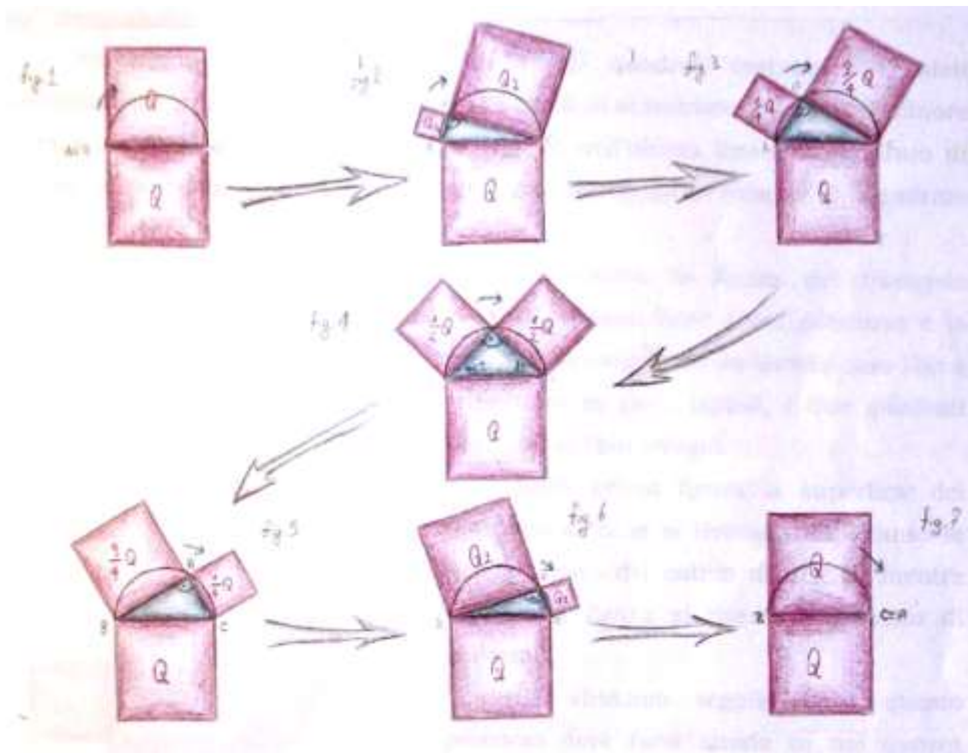


Il quadrato costruito sul lato maggiore(l'ipotenusa) del triangolo ha superficie doppia rispetto aciascuno dei quadrati costruiti sui lati minori (i cateti).

Possiamo anche dire che la sommadei quadrati piccoli è equivalente al (ha la stessa superficie del) quadrato grande. Questa è evidentemente una proprietà del triangolo rettangolo isoscele.

Possiamo formulare una proprietà analoga, valida nel caso di un generico triangolo rettangolo?

Disegnamo sette volte la semicirconferenza di Talete: voglio ottenere una successione di triangoli rettangoli, una figura che evolve.



Nella prima delle sette semicirconferenze il vertice *A* coincide con l'estremo *B* del diametro. Non vedo nessun triangolo, infatti è come se fosse "schiacciato" sulla propria base, l'ipotenusa, il cateto minore è un punto e il cateto maggiore è il diametro.

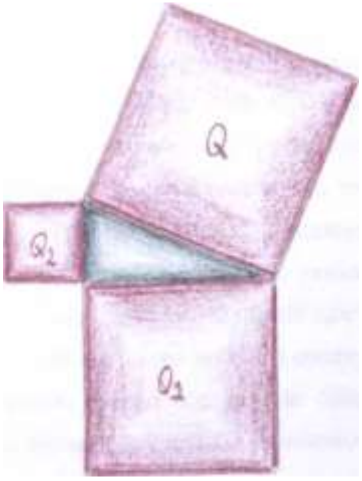
Ora faccio correre il vertice *A* sulla semicirconferenza, il cateto minore sorge e si allunga e quello maggiore si accorcia. Nella quarta figura i due cateti sono congruenti, poi il triangolo rettangolo si schiaccia dall'altra parte e infine collassa, scompare, degenera nel diametro. Questa è una evoluzione di triangoli rettangoli con l'ipotenusa in comune.

In ciascuna figura ora aggiungo i quadrati dei cateti e dell'ipotenusa ed osservo come evolve la situazione.

Naturalmente nella prima figura ci sono solo due quadrati, tra loro congruenti: il quadrato del cateto minore **è** per cosi dire nullo. Poi il quadrato del cateto maggiore diventa appena un po' più piccolo e compare a sinistra un quadratino. Nella terza figura il quadratino **è** cresciuto, il quadrato del cateto maggiore si è un po' rimpicciolito.

Nel punto centrale dell'evoluzione i due quadrati costruiti sui cateti diventano congruenti. Oltre questo punto i cateti si scambiano di ruolo, il minore diventa maggiore e il maggiore minore, finché nell'ultima figura il quadrato di destra si annulla e quello a sinistra diventa grande quanto il quadrato dell'ipotenusa.

Nel punto centrale dell'evoluzione ritroviamo la figura del triangolo rettangolo isoscele, qui ruotata di 45°. Così vediamo bene che l'ipotenusa è la base e i due cateti sono i due lati obliqui. Sappiamo già che in questo caso l'area del quadrato costruito sulla base si ripartisce in parti uguali, i due quadrati



costruiti sui lati obliqui.

Nella prima figura la superficie del quadrato di base si riversa completamente nel quadrato del cateto di destra, mentre nell'ultima figura si riversa nel cateto di sinistra.

Se abbiamo seguito bene questo percorso deve farsi strada in noi questa idea, che anche nelle figure intermedie disegnate la superficie del quadrato di base si ripartisce, sia pure in parti disuguali, nei due quadrati dei cateti, e che questo sia vero per tutti i possibili triangoli rettangoli. Detto in altri termini:

In un triangolo rettangolo dato, la somma dei quadrati costruiti sui cateti equivale al quadrato sull'ipotenusa.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Dimostrazione del teorema

Il teorema di Pitagora è al centro della geometria.

È il punto di partenza, in VII classe, dello studio di questa materia. Viene ridimostrato in VIII classe a partire dal primo teorema di Euclide e in IX classe a partire dal teorema di Talete sulle proporzioni. È nuovamente punto di partenza in X classe per la fondazione della trigonometria e in XI per la fondazione della geometria analitica.

Se la sua importanza potesse venire misurata dal numero di studenti che non lo capiscono, che lo dimenticano o che lo applicano in modo errato, un qualunque governo illuminato lo metterebbe a bilancio accanto a voci quali la sovrappopolazione o l'inquinamento (lo so, la battuta è fuori luogo).

Per la posizione centrale che occupa deve venire mostrato, dimostrato, esemplificato, applicato, ridimostrato...

... amato, masticato, digerito, fino a quando non diventa naturale come 2+2=4.

In questo capitolo ricominciamo dall'inizio e vediamo due dimostrazioni del teorema. La prima delle due è valida solo per i triangoli rettangoli isosceli e viene realizzata attraverso un'evoluzione di triangoli; la seconda invece è valida per il caso generale, ed è allo stesso tempo rigorosa ed intuitiva.

Poi, nell'ottica di masticare, il contenuto del teorema, propongo due dimostrazioni che possono venire realizzate anche con carta e forbici, e per questo sono particolarmente adatte alle classi medie.

In un certo senso il contenuto delle prossime pagine sostituisce quello del capitolo precedente, con la differenza che se prima il teorema veniva suggerito, qui viene dimostrato (e ridimostrato...).

Evoluzione di triangoli rettangoli isosceli.

Il punto di partenza **è** il segmento *BC*. Chiamiamo A_0 il suo punto medio e tracciamo Tasse di *BC* (vale a dire la retta perpendicolare a *BC* che passa per *Ag).* Su questa retta immaginiamo di muovere il vertice *A* di un triangolo isoscele con base *BC*. Otteniamo una successione di triangoli isoosceli che, man mano che *A* scende, sono sempre più schiacciati. Nella figura ho scelto due posizioni particolari per il vertice *A:*

1) *il* vertice A_2 è posizionato in modo che A_0A_2 sia la metà del segmento *BC* *:* ciò significa che questo triangolo è rettangolo;

2) il triangolo *B C A $ è* equilatero;

inoltre, per completare la figura: Co-t^aga** *exz^cottoMcux*

3) \ è il punto medio di A_0A_2 *;*

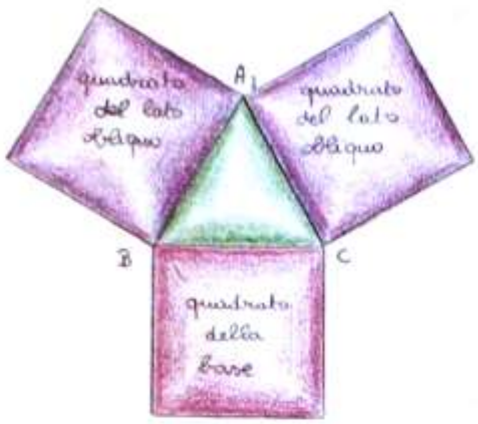
4) *AtA> = /*

1 . /

(scelgo queste ultime due posizioni sulla base di criteri puramente estetici). '

Sui lati di ciascun triangolo isoscele costruiamo i quadrati dei lati stessi; naturalmente, dal momento che la base è in comune, disegnamo il suo quadrato una volta per tutte.

All'inizio i quadrati dei lati obliqui sono così grandi che escono dai margini della figura, ho potuto disegnarne solo una parte, poi quando A scende diventano sempre più piccoli. Consideriamo due posizioni significative.



A

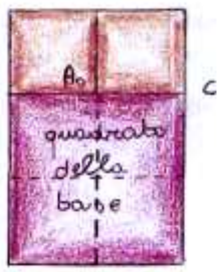
Con il triangolo *BCA^* succede qualche cosa di speciale: dato che i lati sono tutti uguali, i due quadrati dei lati obliqui insieme equivalgono al DOPPIO del quadrato della base. Ora passiamo ad una situazione estrema: il triangolo degenere

A

BC. In questo triangolo il vertice è "crollato" sulla base e il triangolo si è schiacciato fino a diventare un segmento. Vediamo che il quadrato di ciascun lato obliquo è contenuto quattro volte nel quadrato di base; questo significa in altri termini che i

■a

due quadrati dei lati obliqui equivalgono insieme a **METÀ** del quadrato di base.



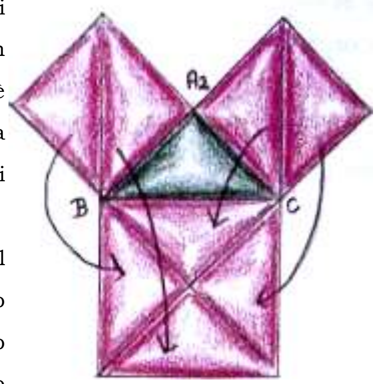
Poiché la situazione evolve con continuità tra questi due estremi possiamo realizzare tutte i casi intermedi, vale a dire tutti i casi nei quali la somma dei quadrati costruiti sui due lati obliqui è più di metà del quadrato di base ma meno del suo doppio.

In particolare deve esistere una determinata posizione del vertice per la quale questa somma equivale esattamente al quadrato di base. Sapete dire qua! è questa posizione?

Diciamo che arrivati a questo punto state tutti alzando la mano per rispondere

"...il trangolo BCAj!" , ottimo,

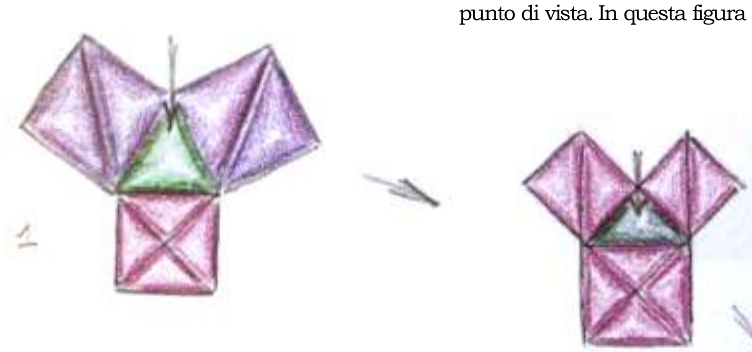
questa è la risposta giusta.



È intuitivo che sia cosi e gli studenti, dopo i primi timidi interventi, se ne convincono presto. In fondo il triangolo in questione ha qualche cosa di speciale, oltre ad essere isoscele è anche rettangolo quindi è il candidato ideale per soddisfare la richiesta equivalenza (per tacer del fatto che il docente ,a cura di non disegnare troppi triangoli).

Una volta espressa questa intuzione occorre trovare il modo di dimostrarla. Durante una lezione su questo argomento potremmo suggerire di "sforbiciare* i quadrati in modo opportuno, così da ricomporre come in un mosaico il quadrato di base con i pezzi ricavati dagli altri due. Realizziamo quanto proposto tracciando una diagonale per ciascuno dei due quadrati obliqui e le due diagonali del quadrato di base. Così si formano otto triangoli rettangoli isosceli congruenti con il triangolo centrale e l'intuizione è immediatamente dimostrata.

Riconsideriamo questa dimostrazione da un altro punto di vista. In questa figura abbiamo tre triangoli



isosceli con la stessa base: nel primo l'angolo al vertice è acuto, nel secondo retto e nel terzo ottuso. In tutti e tre tracciamo le diagonali dei quadrati come indicato sopra. Vediamo che nel primo caso i triangoli che otteniamo dimezzando i quadrati obliqui sono troppo grandi,
mentre nel terzo caso sono troppo piccoli, e solo con l'angolo retto hanno la dimensione giusta.

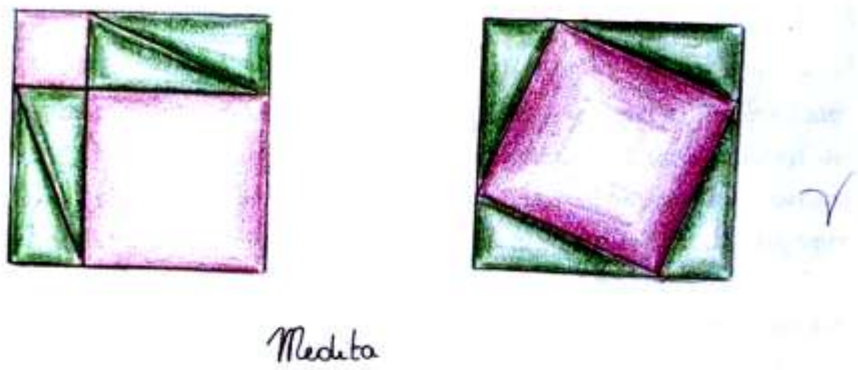
Inoltre solo in questo caso le diagonali dei quadrati obliqui sono parallele e allineate con i lati del quadrato di base, con il triangolo acutangolo divergono e con quello ottusangolo convergono (se prolungate verso l'alto).

Dobbiamo notare che questo itinerario si divide in due momenti: anzitutto, attraverso l'evoluzione dei triangoli isosceli arriviamo a percepire la realtà del teorema, che in un secondo tempo viene dimostrato analizzando la figura.

La dimostrazione indiana.

il primo teorema di Euclide, come il teorema di Pitagora, afferma un'equivalenza di superfici legate al triangolo rettangolo. Viene posto come punto di partenza nei corsi di geometria e da esso Pitagora si deduce immediatamente.

D'altra parte, vista la centralità del teorema di Pitagora nella geometria classica, c'è la necessità di fornirne una dimostrazione evidente e slegata da altri teoremi. Questa necessità è soddisfatta da un'iscrizione trovata su un reperto archeologico, una tavoletta di argilla rinvenuta in India.



Vista la tavoletta? Tutto chiaro, vero? Ecco, dimostrazione conclusa.

La dimostrazione consiste in effetti nell'osservare la figura e meditare. Dopo avere spiegato agli allievi come costruirla possiamo richiedere il silenzio e che ciascuno tragga da ciò che vede le proprie conclusioni.

Come si procede alla sua costruzione? Per fissare le idee disegnamo due copie di un quadrato di 10 cm di lato, suddividiamo poi i lati in parti, ad esempio,

di 3 cm e 7 cm e partiamo da qui per ripartire la superficie del quadrato in due modi diversi.

A sinistra abbiamo quattro triangoli rettangoli congruenti, con cateti lunghi 3 cm e 7 cm, e due quadrati, uno di lato 3 cm e l'altro di lato 7 cm.

A destra abbiamo ancora i quattro triangoli rettangoli, disposti questa volta lungo il perimetro del quadrato, e al centro un altro quadrato che ha per lati l'ipotenusa dei triangoli.

Se a sinistra eliminiamo i quattro triangoli rimangono i due quadrati costruiti sui cateti.

Se a destra eliminiamo i quattro triangoli rimane il quadrato costruito sull'ipotenusa.

Quindi gli uni, assieme, equivalgono all'altro. Dimostrato.

Schopenauer ha indicato, nel suo libro "Il mondo come volontà e rappresentazione", questa dimostrazione come straordinariamente efficacie.

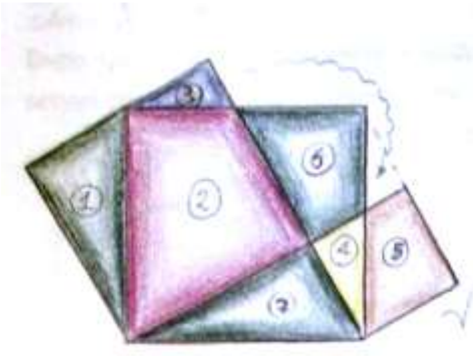
Altre dimostrazioni.

Dopo la dimostrazione che piaceva a Schopenauer deve sorgere nell'allievo l'idea che la stessa quantità di materia necessaria per realizzare i due quadrati dei cateti può essere impiegata per il quadrato dell'ipotenusa. Per questo è opportuno colorare le superfici degli uni e dell'altro, magari con lo stesso colore, ed osservare che si consuma la stessa quantità di gesso nel primo e nel secondo caso.

Un'altra attività appropriata è realizzare in legno le due copie del quadrato, suddivise in tessere come indicato nella tavoletta indiana. Le quattro tessere triangolari possono venire utilizzate per completare i due quadrati minori o il quarato maggiore, il risultato è lo stesso.

In mancanza di legno (e tempo) si possono ritagliare queste forme dal cartoncino: il risultato non è cosi efficace, ma la procedura è alla portata di tutti.

Se ci mettiamo nell'ordine di idee di riproporre il teorema da vari punti di vista, allora le prossime due dimostrazioni sono interessanti.

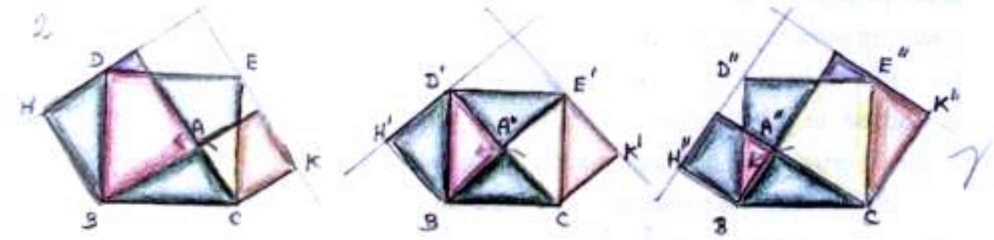


1) Disegnamo un triangolo rettangolo saldamente appoggiato sulla propria ipotenusa ed aggiungiamo come di consueto i due quadrati dei cateti e quello dell'ipotenusa ma questa volta - elemento inatteso - disegnandolo verso l'alto!

Cosa succede qui? Il quadrato dell'ipotenusa si sovrappone parzialmente ai primi due e determina su di essi una ripartizione in settori.

Notiamo che il lato sinistro verticale del quadrato dell'ipotenusa tocca esattamente il lato superiore del quadrato del cateto maggiore. Non è un caso, si può dimostrare che le cose devono stare esattamente così osservando che il triangolo rettangolo 1 **è** congruente al triangolo rettangolo 7.

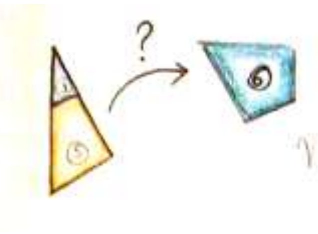
Ciò che vale per il quadrato del cateto maggiore deve valere in qualche forma anche per il quadrato del cateto minore; in effetti, se prolunghiamo il lato di questo quadrato (nella figura sopra questo prolungamento è la linea tratteggiata) raggiungiamo esattamente il lato destro verticale del quadrato dell'ipotenusa, e si forma un altro triangolo rettangolo congruente con il triangolo *7,* formato dal trapezio arancione *S* e dalla "punta" bianca. Tra l'altro, in questo piccolo spazio triangolare si inserisce esattamente il settore 3: il cateto minore di questro triangolino, in effetti, e la base minore del trapezio 5 sono segmenti determinati dalla stessa costruzione e pertanto sono tra loro congruenti.



In questa figura vediamo un'evoluzione di triangoli rettangoli con la stessa ipotenusa; i vertici D ed *E* del quadrato dell'ipotenusa stanno sempre sul lato del

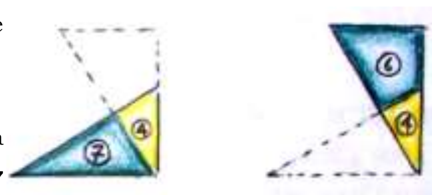
quadrato di un cateto, o sul suo prolungamento, e i triangoli $D\hat{H}B$ e $C\hat{K}E$ sono sempre congruenti con il triangolo $A\hat{B}C$.

Dopo questo esame preliminare della situazione cerchiamo di ricoprire, con i settori che costituiscono i quadrati dei due cateti, il quadrato dell'ipotenusa.



I settori ***2*** e ***4*** stanno bene dove sono, quindi lasciamoli li; poi spostiamo il settore ***1*** nell'area **7,** e a questo punto rimane scoperta solo l'area 6 e abbiamo ancora a disposizione i settori ***3*** e **5.** Con uno spostamento portiamo **3** su **5** in modo da costruire un triangolo rettangolo congruente con **7.** Confrontando la zona da ricoprire con i due settori a disposizione ci sentiamo a disagio: come è possibile ricoprire l'una con gli altri?

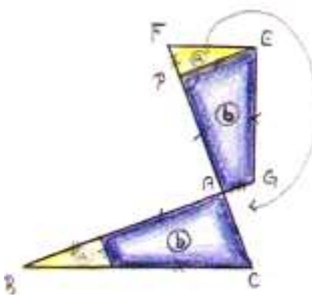
Guardiamo questa nuova figura: i settori 6 e **7** completano diversamente il settore 4 ma il risultato è sempre lo stesso: un triangolo rettangolo che ha gl stessi



A

angoli acuti di ABC ma, per cateto maggiore, la sua ipotenusa. Dunque, pur avendo forma diversa, 6 e **7** sono equivalenti, e dato che con ***3*** e **5** ricopriamo **7** possiamo ricoprire anche 6. -l'estensione della superficie è la stessa.

In VIII classe l'equivalenza di superfici non congruenti (vale a dire che non hanno la stessa forma) è un tema molto forte, e la dimostrazione appena delineata è un esempio di ragionamento adatto a questa classe: il quadrato dell'ipotenusa è composto di porzioni o congruenti o equivalenti a quelle di cui si compognono i quadrati dei due cateti, e quindi è equivalente alla somma dei due.



Se invece vogliamo mostrare in VII che, ad esempio, il settore 6 è equivalente al settore **7,** dobbiamo trovare un modo di scomporre il primo in porzioni che, diversamente ricomposte, diano il secondo. La ripórtazione necessaria è molto semplice: tracciamo il segmento *EP* perpendicolare

--------- A A

a FA; il triangolo $E\ PC$ è

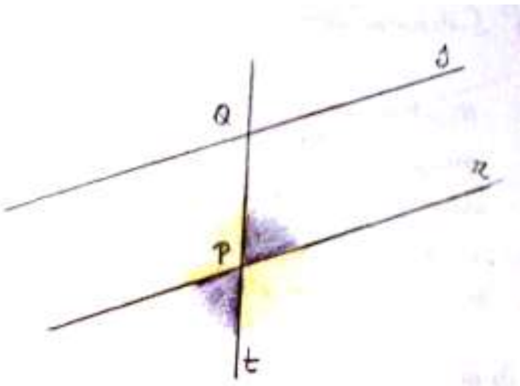
congruente a ABC (stessi angoli ed ipotenusa)// Vediamo poi che *FE* e *CG* sono congruenti perché

A A

costruiti similmente, e quindi sono congruenti anche FPE e GAC e in

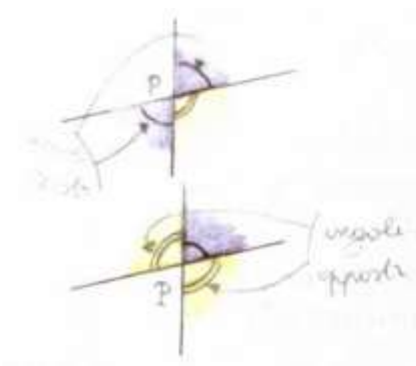
TRIANGOLI RETTANGOLI

Rette ***parallele.***



Disegnate due rette parallele. È un compito impegnativo perché, per definizione, due rette sono tali se sono destinate ad incontrarsi, per Quanto possano venire prolungate. Immaginate di prolungarle per 149 000 000 km (la distanza media della Terra dal Sole): esse non devono incontrarsi neanche a questo punto, né oltre.

Nel mio disegno le due parallele sono r ed s e ho disegnato una terza retta, *t,* che cade trasversalmente sulle prime due e con esse delimita due gruppi di quattro angoli, uno in ogni punto di intersezione.



In ciascun punto abbiamo due coppie di angoli opposti; angoli opposti sono tra loro congruenti perché ciascuno è *supplementare* dello stesso angolo ossia completa, assieme ad esso, un angolo piatto.

La retta trasversale divide il piano in due parti, diciamo destra e sinistra. In questo modo gli otto angoli si possono suddividere anche in angoli di destra e angoli di sinistra, quattro da ciascuna parte.

Inoltre ogni angolo può essere interno oppure esterno, interno se si trova tra le due parallele, esterno altrimenti.

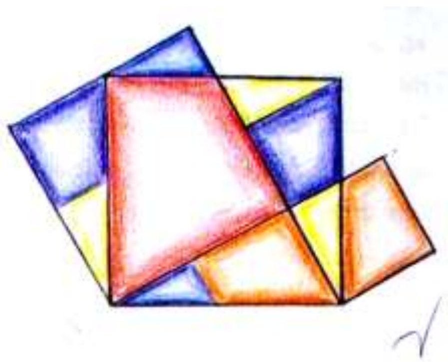
Fissiamo la nostra attenzione sui due angoli interni a destra della trasversale; ciò che diremo per essi è vero anche per le altre tre coppie.

0*4- V^*U>VQ. ***aio***

Immaginiamo di spostare l'angolo in *Q* e di portarlo nel punto *P* accanto all'altro, così che siano adiacenti.

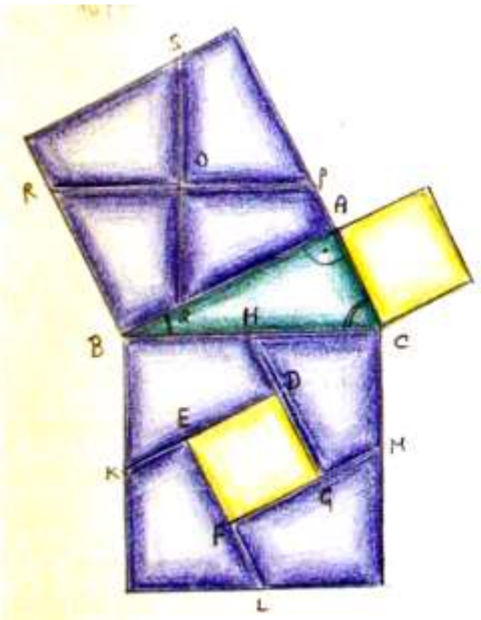
particolare i settori *a* e *b* possono venire composti sia per dare il quadrilatero

AEPG sia per dare *ABC*. ^ *f* Questa ulteriore frammentazione della figura ci consente di completare la dimostrazione in un perfetto stile 'comporre - ricomporre'': credo che la figura qui accanto si spieghi da sola.



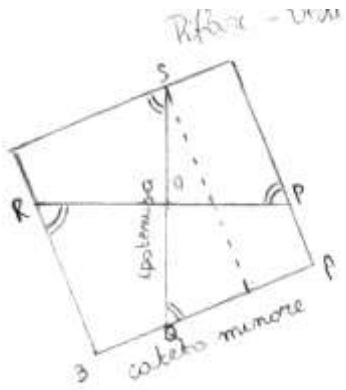
La dimostrazione che otteniamo cosi - sfrondata dei tanti dettagli che ho incluso in queste note - potrebbe essere proposta in VII classe.

2) Disegnamo nuovamente la figura del teorema di Pitagora, questa volta disponendo in modo tradizionali i tre quadrati. Poi suddividiamo in un certo modo il quadrato del cateto maggiore in quattro tessere tra loro congruenti, che ricomposte altrimenti all'interno del quadrato dell'ipotenusa lasciano scoperta, al centro, un'area congruente al quadrato del cateto minore.



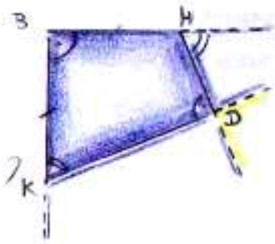
Dunque per comporre il quadrato dell'ipotenusa abbiamo bisogno delle quattro tessere, nelle quali si suddivide il quadrato del cateto maggiore, e del quadrato del cateto minore: ecco di nuovo Pitagora.

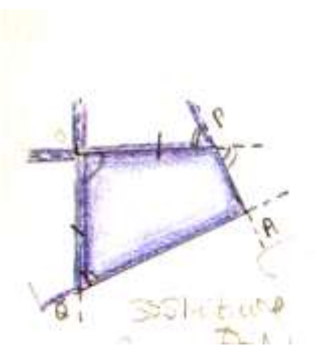
(Ho scorto fugacemente questa dimostrazione sfogliando in libreria un libro, che ho purtroppo ho lasciato sugli scaffali, e dato che mi sembra significativa, guardiamola ora più da vicino.)



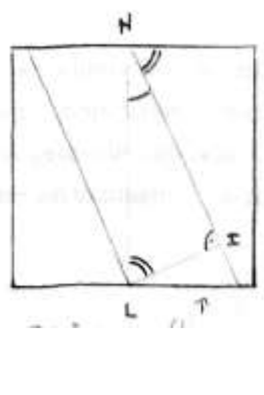
Per ripartire il quadrato del cateto maggiore in quattro tessere procediamo così: partiamo anzitutto dal centro del quadrato e tracciamo due linee tra loro perpendicolari che passano da questo punto; l'angolo che formano rispetto ai lati sia congruente all'angolo acuto maggiore del triangolo rettangolo, C, così nella ripartizione si nasconde proprio questo triangolo, e i segmenti *QS* e *PR* sono congruenti con l'ipotenusa (e i segmenti *OQ, OP, OS* e *OR* sono congruenti alla sua metà).

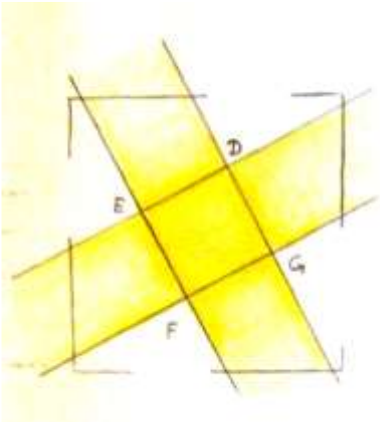
Per ripartire il quadrato dell'ipotenusa, invece, tracciamo a partire dai punti medi dei suoi lati una linea che forma con il lato ancora un angolo congruente a C, sempre dalla stessa parte rispetto al lato. Qui a lato è riprodotto un particolare di questa costruzione, con la formazione di una di queste tessere. Confrontiamola con una delle tessere del quadrato del cateto minore -non è difficile, sono orientate nello stesso modo. Vedete perché sono congruenti? L'angolo *KÈH si* sovrappone esattamente a *QÓP;* poi da *K* e *H* partono due linee inclinate'come le linee corrispondenti che partono daQePalle quali pertanto si sovrappongono con lo stesso movimento che porta *KÈH* su *QÓP.*





Dunque le quattro tessere del quadrato dell'ipotenusa sono le stesse quattro del quadrato del cateto maggiore. Ora dobbiamo dimostrare che il quadrato centrale equivale al quadrato costruito sul cateto minore. Ricominciamo da capo la ripartizione del quadrato dell'ipotenusa ma fermiamoci dopo pochi passaggi, come nel disegno qua a fianco: dopo avere





tracciato la linea obliqua che passa per H tracciamo, perpendicolarmente ad essa, il

______________ A

segmento LI; il triangolo $L\ I\ H$ è una nuova

A

copia del triangolo ABC, e questo significa che LI è congruente al cateto minore AC. Così possiamo vedere che il quadrato centrale risulta dalla sovrapposizione di due strisce mutuamente perpendicolari e larghe quanto il cateto minore ed è dunque una copia del quadrato costruito su di esso.

Se avete -provato a seguire il ragionamento elaborandole-passo dopo passo denteo^ di voivaieUa vostra mente, allora avete^for se incontrato qualche difficoltà. IL-ttttto va realizzato concretamente, magari con carta e forbici; se capite come si realizzano le ripartizioni allora avete già colto l'essenza della dimostrazione.

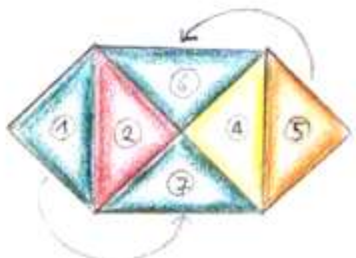
Torniamo al triangolo rettangola isoscele.-

Le tre dimostrazioni che ho scelto assumono un aspetto particolare quando IL triangolo rettangolo diventa isoscele. Si tratta di un caso speciale, nel quale le ripartizioni in settori assumono una forma molto semplice.

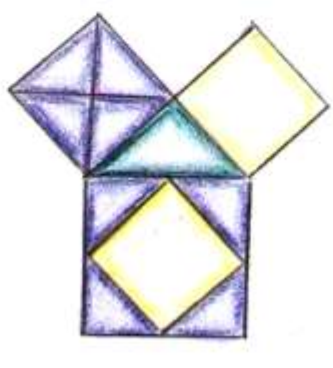
Riconoscete nelle figure riportate in chiusura di questo capitolo le tre dimostrazioni adattate al caso in questione? Tutto diventa più semplice, ma allo stesso tempo i tre metodi di dimostrazione sono eccessivi rispetto alla semplicità? del caso in questione. Un po' come rompere un uovo con la bomba atomica: funziona, ma forse è esagerato.

Esistono altri modi di "sforbiciare" il teorema di Pitagora per dimostrare la sua veridicità. Come docenti, nei limiti concessi dal tempo a nostra disposizione, non dovremmo mai stancarci di cercare strade alternative e di proporle agli allievi, magari durante le ore di esercizi. Solo così possiamo formare un'immagine chiara e imperitura di questo crocevia dellla matematica.

Prima dimostrazione: *la tavoletta indiana*



Seconda dimostrazione

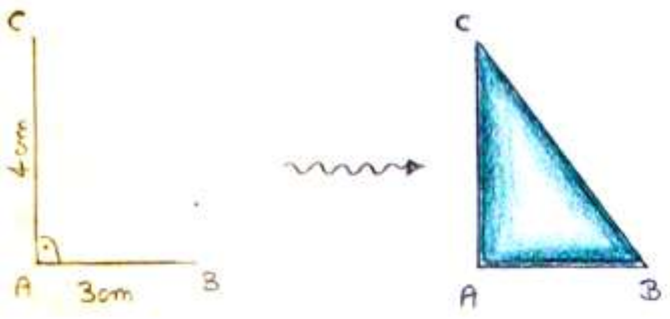


Terza dimostrazione

Aspetti numerici del teoreme di Pitagora

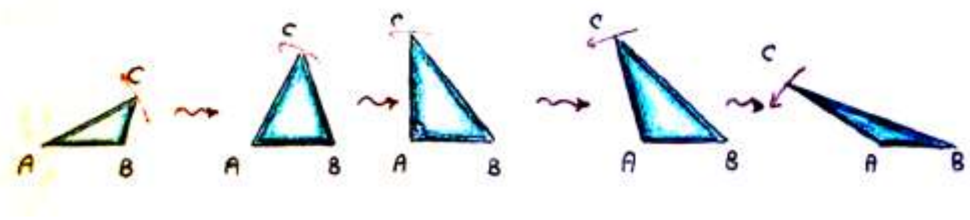
Primo Esempio. Disegnarne- un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 3cme 4 cm.

Cominciamo naturalmente tracciando i due segmenti *AB* ed *AC* della giusta



lugnhezza, 3cm e 4cm. Cosi i due estremi *B* e *C* si trovano in una certa posizione del piano, ad una «erta distanza l'uno dall'altro.

Queste, distanza è ormai fissata e non possiamo intervenire per modificarla. Se avessimo disegnato un angolo *CAB* acuto la distanza *BC* sarebbe stata minore, se l'angolo *CAB* fosse ottuso *BC* diventerebbe più lungo,



così, quando *CAB* è proprio un angolo retto *BC* ha una determinata lunghezza, né più piccola né più grande.

Possiamo misurare *BC :* se eseguite questa operazione e avete realizzazo il disegno con precisione ottenete come risultato 5cm. Naturalmente non è possibile né disegnare né misurare in modo perfetto, quindi non è detto che otteniate proprio questo valore, magari i più pignoli leggerano sul righello 4,95 cm oppure 5,05cm.

In ogni caso, chi ci garantisce che 5cm sia la misura esatta? Anzi, già che ci siamo, cosa significa in questo contesto l'aggettivo "esatta"?

Dato che imprecisioni si verificano inevitabilmente nel disegno di un triangolo e nella misura delle sue lunghezze, non è in questa fase che possiamo conoscere ciò che è esatto. Dobbiamo piuttosto risalire all'idea stessa di triangolo rettangolo, e questa idea è contenuta nel teorema di Pitagora.

Esatto, in questo contesto, è ciò che concorda con questo teorema nel senso della matematica.

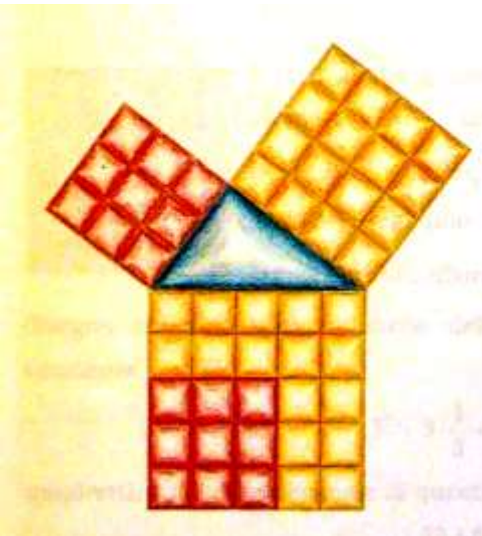
Partiamo dai tre lati del triangolo, i due cateti e l'ipotenusa, e scriviamoli cosi:

3cm 4cm 5 cm? abbiamo da una parte le misure date dei due cateti e dall'altra la misura dell'ipotenusa; notiamo che per il momento stiamo solo supponendo che 5cm sia la misura esatta.

Nel teorema si fa una certa affermazione sui quadrati costruiti sui lati, non si parla dei lati in se stessi: dalla misura del lato passiamo alla misura della superficie elevando al quadrato:

$(3cm)^2$ $(4cm)^2$ $(5cm)^2$? $9cm^2$
$16cm^2$ $25cm^2$?

Ora però possiamo sommare le prime due aree, otteniamo in questo modo la misura della somma dei due quadrati costruiti sui cateti



$9\ cm^2 + 16\ cm^2$ $25\ cm^2$? $25\ cm^2$ m $25\ cm^2$

Finalmente nell'ultimo passaggio abbiamo abolito il punto di domanda: abbiamo a sinistra la somma dei quadrati dei due lati minori e a destra il quadrato del lato maggiore e questi due valori sono uguali, e lo sono proprio perché la misura esatta dell'ipotenusa è 5cm. Possiamo visualizzare meglio questi ragionamenti con il disegno qua a fianco. Le misure intere **3, 4, 5** (qualunque sia l'unità di misura) ci permettono di piastrellare le superfici di ciascun quadrato (ottenendo tra l'altro un gradevole effetto "tavoletta di cioccolato"). Osserviamo come le piastrelle dei due quadrati minori si compongano e coprano esattamente il quadrato maggiore, e questo diventa evidente non appena contiamo le piastrelle.

L'equivalenza geometrica tra la somma delle superfici dei quadrati costruiti sui due cateti e il quadrato sull'ipotenusa diventa, non appena si introduce nel discorso il concetto di area (che è la misura della superficie) una uguaglianza numerica. Ovviamente sono due aspetti della stessa proprietà dei triangoli rettangoli, ma non dovremmo confoderli, soprattutto nell'inseganmento vanno portati in due momenti ben distinti.

L'esempio del triangolo rettangolo di misure 3, 4 e 5 è molto importante e ci tornerò più avanti. È stato comodo fino a qui perché abbiamo a che fare solo con numeri interi ed è facile capire che, ad esempio, se 3 è la misura del lato, $3^2 = 9$ è la superficie del quadrato già solo contando i quadretti nella figura.

Prima di affrontare un esempio meno elementare bisogna essere sicuri di avere capito che la formula

area del quadrato quadrato
del lato

è vera anche quando la misura del lato non è intera. Se ad esempio il lato misura 3,5 unità l'area vale $(3{,}5 \text{unita})^2$ = 12,25quadretti. Cosa significa qui il numero 12,25? Disegnamo questo quadrato scegliendo come unità il segmento ^- . Allora l'unità di superficie è il quadretto  e nel disegno abbiamo bisogno anche delle frazioni di quadretto ,  eCosi . contiamo

$$3^2 + 3\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 12\frac{1}{4}$$

quadretti, e il valore decimale di questa frazione è

$$12 + 0{,}25 = 12{,}25.$$

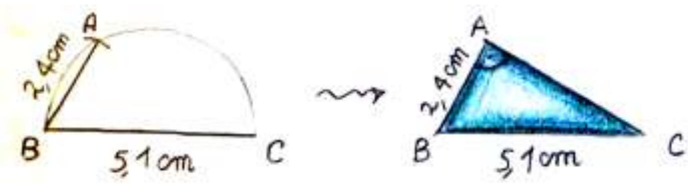
Dovremmo sempre essere in grado di visualizzare in questo modo il calcolo delle aree durante le lezioni perché, anche se questo dovrebbe essere un argomento acquisito dagli studenti delle classi medie, ho l'impressione che la formula sia per molti qualcosa di misterioso.

Secondo esempio (un pochino più difficile). Disegnamo ora un triangolo con queste misure:

uno dei due cateti '£. , = 2,4 cm

ipotenusa = 5,1 cm

con questi dati dobbiamo servirci del teorema di Talete per procedere alla costruzione.



Questa volta, se il nostro disegno è realizzato ragionevolmente bene, possiamo misurare AC e vedere che la sua lunghezza è 4,5cm. Naturalmente si tratta, per ora, di un'ipotesi sul valore esatto. I lati del triangolo sono quindi

2,4cm 4,5cm? 5,1 cm

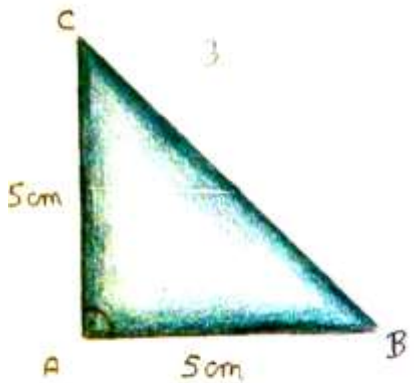
e per il momento il punto di domanda è d'obbligo. Ragioniamo ora in modo diverso rispetto a prima. Anzitutto $(2{,}4cm)^2 = 5{,}76cm^2$ e $(5{,}1\ cm)^2 = 26{,}01\ cm^2$. Quindi $5{,}76\ cm^2$ è l'area del quadrato di uno dei due cateti e $26{,}01\ cm^2$ è l'area del quadrato dell'ipotenusa, e dal momento che

$$26{,}01\ cm^2 - 576cm^2 = 20{,}25\ cm^2$$

questo valore deve essere l'area del secondo quadrato in accordo con il teorema di Pitagora.
Troviamo lo stesso risultato se calcoliamo il quadrato di 4,5cm,

$$(4{,}5\ cm)^2 = 20{,}25\ cm^2,$$

e quindi 4,5cm è la misura esatta, ancora in accordo al teorema. Ne 4,49 era né 4,51 cm ma esattamente 4,5cm.



Terzo esempio (apparentemente più. semplice). Disegnamo un triangolo rettangolo isoscele. La misura comune dei due cateti sia 5cm. Quanto misura *esattamente* l'ipotenusa? Comincio, volutamente, con una valutazione rozza del segmento BC, $7\ cm$. La terna dei lati sarebbe quindi

5cm 5 cm 7cm?

ma se eleviamo al quadrato constatiamo che questa terna non rispetta il teorema di Pitagora:

$$25cm^2 + 25cm^2 * 49cm^2,$$

dunque 7 cm non può essere la misura giusta.

Del resto 7cm è proprio una stima rozza di BCÌ Se guardiamo meglio la misura giusta sembra piuttosto 7,1 cm... Non proprio ma, si sa, il disegno non è perfetto...

Senonché non ci siamo ancora, perché

$$(7{,}1\ \text{cm})^2 = 50{,}61\ \text{cm}^2$$

e questa volta l'area è un po' più grande della somma dei due quadrati.

Allora, se le cose stanno così, il valore esatto deve essere compreso tra 7cm e 7,1 cm. Esattamente a metà si trova il valore 7,05cm, proviamo pertanto con questo numero:

$$(7{,}05\ \text{cm})^2 = 49{,}6025\ \text{cm}^2.$$

Questa volta otteniamo un'area minore di quella esatta, ma abbiamo fatto un piccolo passo avanti, perché ora sappiamo che la misura che stiamo cercando si trova tra 7,05cm e 7,1 cm. Vediamo che l'area del quadrato si avvicina sempre di

più a 50 cm^2 e allo stesso tempo abbiamo costretto la misura di *AC* entro confini sempre più angusti. Dato che nelle classi medie si introducono i simboli "<" ("minore di") e "ì^maggiore di") possiamo scrivere

$$7{,}05\ \text{cm} < AC < 7{,}1\ \text{cm}$$

espressione che di solito si legge cosi: *"AC* è compreso tra 7,05cm e 7,1 cm".

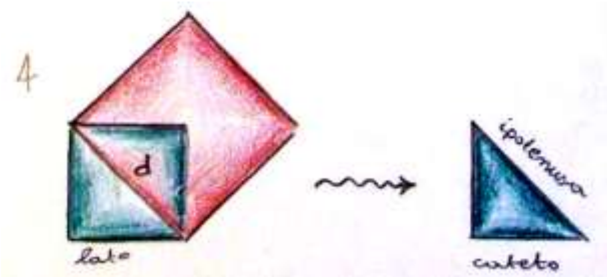
Stiamo cercando la misura esatta di *AC* per tentativi, tutto ciò potrebbe sembrare poco serio! Non dovremmo forse applicare una qualche formula appropriata?

Il punto è che la formula appropriata esiste, ed è l'espressione algebrica del teorema di Pitagora, ma allo stesso tempo l'esempio proposto è sostanzialmente diverso dai primi due e la *conoscenza del valore esatto* non è possibile nel senso che comunemente si attribuisce a questa espressione.

/ numeri irrazionati (ed è qui che volevo arrivare!). Se ci accontentiamo di due cifre dopo la virgola è possibile vedere che AC = 7,07 cm; possiamo verificare l'accuratezza di questa approssimazione elevando al quadrato, $(7{,}07\text{cm})^2 = 49{,}9849\text{cm}^2$ quindi ci siamo avvicinati molto...

...Ma ancora non ci siamo! Ma insomma, che un triangolo rettangolo isoscele dia tante noie...

In un certo senso questo esempio appartiene alla storia del pensiero occidentale. Ai tempi di Pitagora molte energie venivano spese attorno al problema della duplicazione del quadrato, sul quale abbiamo già lavorato.



Questo problema equivale al calcolo della lunghezza della diagonale del quadrato che si vuole raddoppiare, ossia al calcolo della lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele, uno dei due nei quali la diagonale taglia il quadrato.

Il problema era ampiamente dibattutto perché, nell'ottica della matematica dell'epoca, non era risolubile.

Si trovò che se la misura del lato è un numero intero o una frazione, allora la misura della diagonale non può essere una frazione (né tantomeno un numero

707

intero). Il numero 7,07 equivale alla frazione ——■ ma non è la misura esatta, **è**

71 705

solo un po' più accurata delle precedenti, ossia 7, —, ——.

Il fatto è che nessuna frazione può esprimere la misura esatta che stiamo cercando. Questa misura è espressa da un nuovo tipo di numero, che i Greci si rifiutavano di prendere in considerazione, una entità **irrazionale** ("ratio" in latino significa "rapporto", "frazione"), ed é questo il motivo per cui non riuscivamo a detemiinarlo.

Più avanti torniamo su questo esempio e vediamo come, dal punto di vista della matematica moderna, si risolve il problema. Qui notiamo solo che in generale, costruendo un triangolo rettangolo due lati del quale hanno come misura numeri interi, il terzo potrebbe avere misura irrazionale; questa anzi è la situazione di gran lunga più frequente. Più rari, e per questo notevoli, sono i casi in cui tutti e tre i lati sono frazioni, o meglio ancora numeri interi. Di questi casi ci occupiamo nel prossimo capitolo.

Terne **Pitagoriche**

I primi due esempi del capitolo che si è appena chiuso sono sostanzialmente diversi dal terzo. Nel triangolo di misure

3 4 5

vale esattamente la relazione

$$3^3+4^a=5^2,$$

che esprime numericamente l'equivalenza di superfici stabilita dal teorema di Pitagora, e allo stesso modo nel triangolo

2,4   4,5 5,1 è

verificata esattamente l'uguaglianza

$$2{,}4^2 + 4{,}5^2 = 5{,}1^2$$

(anche se i calcoli relativi sono un pochino più difficili). Per contro le misure

5   5 7,07

sono solo approssimativamente valide, perché la somma dei primi due quadrati è 50 mentre $7{,}07^2 = 49{,}9849$. Come si vede la differenza è piccola ma esiste, e vedremo che per capire quanto segue è il caso, per una volta, di essere pignoli (se preferite potete usare l'aggettivo "rigorosi"). Questa piccola differenza significa che un triangolo con queste misure non é esattamente rettangolo, perché in questo caso il teorema di Pitagora dovrebbe valere esattamente, non approssimativamente.

Per inciso, date queste misure uno studente di X classe dovrebbe essere in grado di stabilire che l'angolo compreso tra i due lati uguali vale 89*58'57",708027566497367303441905027681 (grosso modo), quindi un pochino meno dei 90° richiesti.

Riformuliamo il problema in questi termini: se un triangolo rettangolo ha i due cateti lunghi 5 unità, quante unità misura esattamente l'ipotenusa?

I nostri sforzi di determinare il valore esatto hanno prodotto la sequenza 7 7,1 7,05 7,07 nella quale ogni numero rappresenta una misura più precisa della precedente, ma neanche l'ultimo é esatto.

Ho detto anche che in un certo senso non è possibile trovare il valore esatto. Che cosa significa questa affermazione? Abbiamo visto che questo problema apre una porta su un campo intrigante della matematica, l'esistenza dei numeri irrazionali.

Un numero irrazionale famoso.

Nel terzo esempio la caratteristica fondamentale del triangolo rettangolo è di essere anche isoscele. Guadagnamo in semplicità se studiamo un triangolo rettangolo isoscele in cui i cateti misurano 1 unità.

Non sappiamo la misura dell'ipotenusa, quindi possiamo indicarla con la lettera *x*. Il teorema di Pitagora dice che

$$1^2+1^2 =x^2.$$

Possiamo riscrivere questa relazione scambiando il lato di sinistra con il lato di destra, e svolgendo i calcoli numerici. Otteniamo

$$x^2 = 2 .$$

Tutto qui. Un'espressione matematica con un "uguale" nel mezzo e il simbolo universale per i valori incogniti, la "x". Quindi abbiamo una piccola equazione.

Questa equazione ci dice che x è un numero il cui quadrato vale **2.** In-altri termini, x è la radice quadrata di **2,** così possiamo scrivere in simboli

$$x = V2.$$

Ora sappiamo quanto vale l'ipotenusa? Che differenza passa," tra affermarmare che l'ipotenusa vale 5 o 5,1, da una parte, ovvero **J2* dall'altra? Sappiamo in tutti e tre i casi il valore esatto?

Il numero 5 fa parte dei cosiddetti *numeri naturali;* si tratta della prima sequenza di numeri che abbiamo incontrato nella nostra vita,

1, **2,** 3, 4, 5, 6, 7, •••

i numeri che usiamo per contare. Se qualcuno ci dice che un'ipotenusa misura 5 unità ci facciamo un'idea chiara del procedimento con il quale possiamo costruirla: allineiamo cinque copie dell'unità in questione ed il gioco è fatto. In questo senso possiamo ben dire quanto misura l'ipotenusa!

Il numero 5,1 è il valore decimale della frazione 51/10 (per rendersene conto basta eseguire la divisione). Le frazioni formano l'insieme dei *numeri razionali.* Possiamo parlare indistintamente di frazioni o di numeri decimali perché le une sono sempre esprimibili dagli altri, e ad ogni valore decimale corrisponde una frazione (anche nel caso dei numeri periodici).

Come possiamo costruire un segmento che misura 5,1 unità? Ciò che si fa di solito è cambiare l'unità di misura, scegliendone una più piccola, in modo che la grandezza in questione sia espressa nella nuova unità da un numero intero. Nel nostro caso *vecchia unità* = lem, *nuova unità* = lmm e 5,lem = 51 mm. Così anche in questo caso sappiamo il significato della misura "5,1 unità", sappiamo quant'è, sappiamo quanto vale.

Ogni misura espressa da un numeero razionale può essere espressa anche da un numero intero, basta suddividere l'unità in un numero opportuno di parti nel modo indicato. Da questo punto di vista numeri interi e frazioni sono la stessa cosa. Quando Pitagora scrisse "Tutto è numero" pensava alle frazioni, con le quali intendeva spiegare tutto il mondo sensibile, dalla geometria alla musica.

Poi si imbattè in >/2, come noi oggi, e cominciò a nutrire qualche serio dubbio sulla propria convinzione.

Se i/2 è un numero, da quale frazione è rappresentato ovvero, in termini più moderni, da quale valore decimale? ...

Nelle quarantadue linee che partono dalla fine di questo paragrafo descrivo un procedimento iterativo per la ricerca del suo valore. Seguire il processo passo per passo, a mio avviso, è istruttivo perché coinvolge alcune piccole idee utili a lezione; comunque, se decidete che siete un tantino impazienti potete saltare alle conclusioni (è facile trovarle: c'è scritto *"conctusion?* all'inizio).

... Non sapendo far di meglio procediamo a tentoni e cerchiamo per approssimazioni il valore decimale di>/2 .

Cominciamo dall'elenco dei numeri sotto al quale scriviamo l'elenco dei loro quadrati, così:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ••• 1 4 9 16 25

36 49 64 81 •••

Hso scritto in grassetto i numeri **1** e **4** perché tra essi si trova il numero 2: quindi la radice di 2 deve stare da qualche parte tra **JÌ* = 1 e V4 = 2 :

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

oppure, come possiamo dire (e scrivere, perché no?!) a lezione

$$\sqrt{2} = 1,\ \textit{qualcosa}$$

(questra espressione di solito è efficace, colpisce l'immaginazione). Ora dovremmo dire qualcosa di più sul valore di *qualcosa.* Per questo partiamo da una porzione superiore dell'elenco dei numeri,

—	11	12	13	14	15	16	17	18	19 ■••
—	121	144	169	196	225	256	289	324	361 —

Per potere utilizzare questi elenchi ricaviamo da essi i prossimi due spostando la virgola decimale:

- 14 L2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 •••

L21 1,44 1,69 1,96 2,25 256 2,89 3,24 3,61

(se in un numero la virgola decimale viene spostata di una posizione, allora nel suo quadrato viene spostata di due posizioni, nella stessa direzione).

Questa volta in grassetto scrivo i numeri 1,96 e 2,25 che sono rispettivamente il quadrato immediatamente più piccolo e il quadrato immediatamente più grande di 2 e dato che 71*96 = 1,4 e ^*J225* -1,5 possiamo *localizzare* -*J2* tra questi due estremi:

1,4 < V2 < 1,5

e la stessa cosa può essere scritta così:

■*J2* = 1,4 e *qualcosina* ov^ = 1,4 —

o anche -*J2* = 1,4

Il prossimo passaggio richiederebbe l'elenco dei numeri tra 1,41 e 1,49 e dei loro quadrati; se lo eseguissimo potremmo vedere che L41 < -*J2* < L42.

Possiamo proseguire indefinitamente lungo questa strada. Con molta, molta pazienza troveremmo che 1,4142 < V2 < 1,4143, oppure più sinteticamente

V2 = 1,4142

(se non lo avete mai usato è bene che sappiate che il simbolo "=* significa "circa uguale* e indica che il valore che segue è approssimato per difetto sull'ultima cifra).

Questo non è il metodo che si usa solitamente per estrarre una radice quadrata (non è efficiente) ma è sufficiente perché ci facciamo un'idea del problema.

Conclusione. Il punto che qui dobbiamo cogliere è che, qualunque procedimento scegliamo per il calcolo dell'espressione decimale di *42,*

questo procedimento non termina mai,

vale a dire che

•v/2 ha infinite cifre dopo la virgola decimale.

Diciamo che abbiamo trovato il primo milione di cifre dopo la virgola. Non sono tutte, ne mancano ancora infinite. Dunque non possiamo scrivere il valore esatto di V2 e per lo stesso motivo non possiamo trovare un'unità di misura nella quale la grandezza -*J2* unità sia espressa da un numero intero.

Perché le cose stanno così? Come facciamo ad esserne sicuri? Un allievo attento, sufficientemente sveglio e desideroso di mettere in difficoltà il maestro (come tutti i bravi allievi delle classi medie) chiederebbe

"...Ma come si fa a sapere che dopo tantissime cifre non si trova l'ultima e poi non ce ne sono più?"

o qualcosa del genere? Il fatto è che se V2 fosse una frazione, allora ammmetterebbe una rappresentazione decimale finita (anche se non sembrerebbe questo vale anche per i numeri periodici, come spiego in chiusura del capitolo).

Ma *yf2* non è una frazione. Non è un numero razionale, si può dimostrare che è qualcosa di diverso. È un numero irrazionale.
Tutto quello che abbiamo visto per -*J2* vale anche per

e in generale per tutte le radici di numeri che non siano quadrati perfetti. Queste radici non sono frazioni, non hanno una rappresentazione decimale finita e il loro valore non può essere conosciuto nel senso più comune del termine. Pitagora pensava che questi non fossero numeri nel senso completo del termine, noi li accettiamo come numeri ma guardiamo ad essi con cautela.

***Il** teorema di Pitagora, i numeri irrazionali e le terne pitagoriche.* Abbiamo da una parte la geometria con il teorema di Pitagora e dall'altra l'esistenza dei numeri irrazionali. Questi due argomenti sono intimamenti connessi. Costruiamo un triangolo rettangolo partendo da due dei suoi lati, e questi lati abbiano come misura due numeri razionali.

Possiamo immaginare anche che le misure siano intere, poiché se non lo sono possiamo sempre cambiare unità di misura e farle diventare tali (ad esempio 2,4 cm e 4,5 cm diventano 24 mm e 45 min).

Mentre abbiamo potuto scegliere liberamente le misure dei primi due lati, e le abbiamo scelte intere, la terza misura è determinata dalla necessità di soddisfare esattamente il teorema di Pitagora. È il teorema a stabilirne il valore.

Questo valore sarà quasi sempre un numero irrazionale.

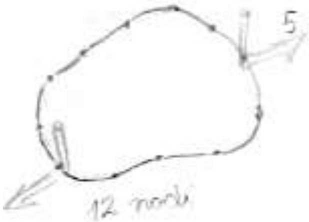
In altri termini, il triangolo rettangolo i cui lati, in una qualche unità di misura, sono lunghi rispettivamente **3, 4, 5** unità rappresenta qualcosa di eccezionale. Per questo motivo ci riferiamo a questi tre numeri con un'espressione speciale: *terna pitagorica.* La sua caratteristica è che $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Possiamo ricavare un'altra terna partendo dal triangolo di misure 2,4 4,5 5,1. Moltiplichiamo questi numeri per 10, otteniamo i numeri 24 45 51 il cui massimo comun denominatore è 3. Dividendo questi numeri per 3 otteniamo la terna, a me particolarmente simpatica per qualche misteriosa ragione, **8, 15, 17** e possiamo verificare che vale per essa l'uguaglianza $8^2 + 15^2 = 17^2$ ($8^2 = 64$, $15^2 = 225$, $17^2 = 289$ e $64 + 225 = 289$) e dunque oltre terna è anche pitagorica.

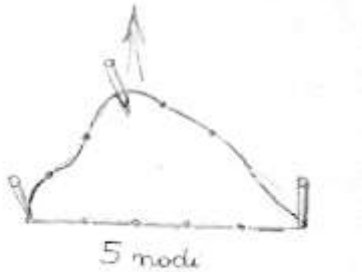
Una terna pitagorica quindi è un gruppo di tre numeri interi con la proprietà che la somma dei quadrati dei primi due dia il quadrato del terzo. È anche importante che i tre numeri non abbiamo un massimo comun divisore maggiore di 1, cioè che non siano semplificabili. Ad esempio 8, 15, 17 è una terna pitagorica ma 32, 60, 68 no, o meglio non è niente di nuovo, perché M.C.D.(32,60,68)= 4 e dividendo per 4 riotteniamo 8, 15, 17.

Le piene del Nilo.

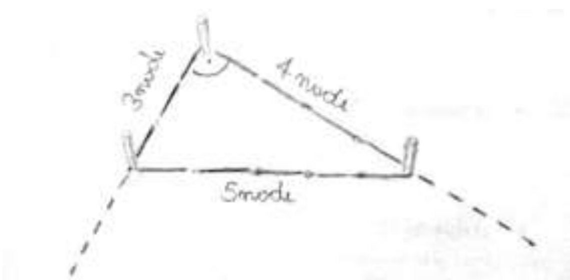
La terna 3, 4, 5 è la più piccola nonché la più famosa. Si narra all'inizio di ogni prima lezione sulle terne piragoriche che, dopo ogni piena del fiume Nilo, gli agrimensori egizi avessero il compito di ripristinare i confini dei campi devastati dalle acque. Tra i problemi di ordine pratico che si ponevano vi era in particolare quello di tracciare angoli retti tra i lati dei campi.



Come procedere per realizzare in pratica un angolo retto? Il metodo straordinariamente semplice che usavano prevedeva l'uso di una fune con 12 nodi posti ad intervalli regolari. Il numero 12 qui è il risultato della somma 3 + 4 + 5.



Questa fune veniva utilizzata così: venivano piantati azitutto due paletti ad una distanza di 5 nodi, tendendo così parte della fune. Un terzo paletto andava posizionato in corrispondenza del terzo nodo da uno dei primi due paletti, tendendo così la fune per tutta le sua estensione e formando così tre



segmenti consecutivi di lunghezza 3, 4 e 5. Si forma pertanto il triangolo 3, 4, 5 che, come abbiamo visto, è rettangolo tra i lati 3 e 4.

Questa narrazione introduce in modo concreto l'argomento terne. Con essa si mostra l'esistenza di un triangolo rettangolo in cui tutti e tre i lati hanno misure espresse da numeri interi. Pur senza percorrere tutto l'itinerario che ho proposto bisognerebbe chiarire agli allievi che i triangoli rettangoli con questa proprietà sono molto rari.

Brevemente, sui numeri periodici.

Mentre le frazioni ammettono una rappresentazione decimale finita, i numeri irrazionali come -*J2* no. A complicare leggermente la situazione ci sono i cosiddetti numeri periodici, È opportuno fare un po' di chiarezza prima di procedere.

Numeri periodici sono ad esempio 0,3 0,16 2,25; vediamo che essi hanno infinite cifre dopo la virgola e cionondimeno equivalgono alle frazioni 1/3 1/6 223/99 e allora sembrerebbe che ci siano frazioni con rappresentazione decimale infinita.

In realtà, nella parte decimale di un numero periodico vi è, da un certo punto in poi, un gruppo di cifre dette per l'appunto periodo che si ripete infinite volte. Questa struttura particolare permette tra l'altro di risalire alla frazione corrispondente. Se ad esempio il numero è — — —

numero - 2,25

possiamo anche scriverlo così:

numero = 2,25252525 •••

e vediamo che moltiplicando per 100 otteniamo

100 • *numero* = 225,25252525 •••

(stiamo giocando con il fatto che ci sono infinite copie del periodo). Ora calcoliamo la differenza

100 *numero* = 225,25

1 - *numero* = 2,25 99 •

numero = 223 e dal risultato

vediamo per l'appunto che

$$numero = \frac{223}{99}.$$

Dunque dai numeri periodici possiamo passare alle frazioni sostanzialmente per via della struttura periodica; struttura che il numero V2 non ha, ossia da nessun punto in avanti della sua parte decimale compare un periodo che si ripete infinite volte; addentrarsi in questa parte decimale è un'avventura della quale non possiamo prevedere l'esito, nessuno sa quale sarà la prossima cifra fino a quando non verrà calcolata; al contrario per i numeri periodici: se ad esempio mi chiedete (so che qualcuno di voi freme per saperlo) qual è la cifra in posizione unmilionesettecentocinquantaquattromilanovecentoquindici nella parte decimale di 2,25 rispondo senza alcun problema "2", mentre la successiva è "5". Vedete perché?

Il tratto distintivo non è tanto nell'avere finite o infinite cifre dopo la virgola, ma che le eventualmente infinite cifre abbiano o non abbiano una struttura periodica: nel primo caso ci troviamo di fronte ad una frazione, nel secondo ad un numero irrazionale.

Il prossimo passo.

Con il teorema di Pitagora ci dobbiamo confrontare con il problema dei numeri irrazionali, che tra l'altro comportano calcoli complicati.

In un mondo di triangoli rettangoli in cui almeno uno dei tre lati ha misura irrazionale, esistono, come stelle che punteggiano il cielo profondo, triangoli rettangoli straordinari nei quali i lati hanno misure intere. Siamo interessati a questi punti luminosi per la loro bellezza e per la loro utilità pratica.

Possiamo porci l'obbiettivo di capire se oltre a 3, 4, 5 e a 8, 15, 17 esistano altre terne pitagoriche.

Questo è il compito affrontato nel prossimo capitolo.

Caccia alla terne pitagoriche

Numeri dispari e numeri quadrati La ricerca di nuove terne pitagoriche esula da un contesto strettamente geometrico. Si tratta in effetti di rovistare nel mondo dei numeri e delle loro proprietà.

U nostro punto di partenza è la lista dei numeri dispari 1 3 5 7

9 11 —

Otteniamo qualcosa di interessante se sommiamo questi numeri, uno dopo l'altro; possiamo arrestare la somma dopo uno, due, tre, ... quanti passaggi vogliamo, così:

$1 = 1$ $1 + 3 = 4$

$1+3+5=9$ $1 + 3 + 5 +$

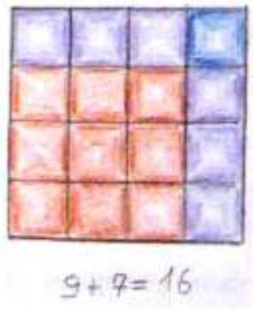
$7 = 16$

$1+3+5+7+9=25$

Guardiamo l'elenco delle somme: abbiamo trovato i numeri

1 4 9 16 25 —

ma questi sono tutti i quadrati dei numeri naturali! Abbiamo arrestato la somma al numero 9; il successivo numero dispari è 11, e 25+ 11 = 36, che è il numero quadrato successivo a 25; dopo 11 viene il numero 13 e 36 +13 = 49 e possiamo continuare indefinitamente.

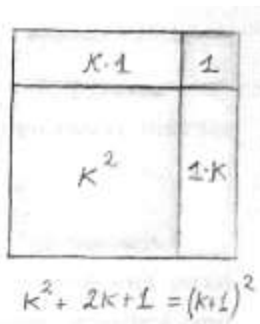


Cerchiamo di visualizzare quanto sta succedendo. Qui a fianco ho disegnato un quadrato 3x3 all'interno di un quadrato 4x4; il lato del quadrato aumenta di 1 e la superficie passa da 9 a 16 unità, vi è una differenza di 7 unità; questa differenza si ripartisce in 3 aree: due rettangoli 3x1 e 1x3 e un quadrato 1x1. La figura ci suggerisce pertanto di scrivere il numero che esprime la differenza così: 7 = 2- **3** + 1, e allo stesso modo 9 = **3**^{2} e 16 = **(3** +1)^2, così tutte le aree coinvolte fanno capo in qualche modo al numero **3;** ora, con un agile balzo, passiamo all'algebra: al posto di 3 scriviamo *k,* così potremo far riferimento alla proprietà generale anziché ad un caso specifico. Con questa lettera (o con quella che preferite) esprimiamo i tre soggetti del discorso:

quadrato = k^2

quadrato successivo _/. .\a »'

differenza (numerodispari) _ 2fc +1



Ora possiamo esprimere la relazione tra numeri dispari e numeri quadrati in questo modo:

£ + 2fc + 1 = (fc + 1)2
quadrato numero quadralo dispari successivo

Forse riconoscete nella relazione k^2 + 2*k*+1 = *(k* + *ïïf* un caso speciale della formula del quadrato del binomio (che si insegna in VII classe): l'uguaglianza è valida qualunque sia il valore attribuito a *k* e questo ci garantisce che la proprietà osservata continui a valere ad ogni dispari aggiunto. Prendendo come esempio la somma

$$\overbrace{\underbrace{1+3+5+7+9}_{primi\ 5\ dispari}}^{primi\ 4\ dispari} = \underbrace{25}_{5^2}$$

vediamo che la relazione tra numeri dispari e numeri quadrati può essere espressa così:

> la somma dei primi *k* numeri dispari è il quadrato del numero *k;*

da un altro punto di vista la stessa relazione può essere formulata così:

> la differenza tra un quadrato e il successivo è sempre un numero dispari e calcolando in ordine progressivo queste differenze otteniamo l'elenco di tutti i numeri dispari.

È in questa veste che la proprietà indicata si rivela la chiave per la determinazione di nuove terne.

Una famiglia di terne pitagoriche

I salti da un quadrato al successivo sono, uno dopo l'altro, tutti i numeri disparì; tra i numeri dispari compaiono numeri che sono anche quadrati perfetti: il primo dì questi è il numero 9 e compare nella differenza tra 16 e 25:

$$16 + 9 = 25.$$

In questa uguaglianza ci sono tre quadrati perfetti, ed essa può essere riscritta così:

$$4^2 + 3^2 = 5^2,$$

ritroviamo i numeri 3, 4, 5 nella relazione che li lega e fa di essi una tema pitagorica. Possiamo aspettarci di trovare una terna con la stessa proprietà ogni volta che la differenza tra un quadrato e il successivo è essa stessa un quadrato. Scriviamo allora un elenco di quadrati sufficientemente lungo:

1 4 9 **16** **25** 36 49 64
3 **5** **7** **9** **11** **13 15**

64 81 100 121 **144** **169** 196 225
17 **19** **21** **23** **25** **27 29**

225 256 289 324 361 400 441 484
31 **33** **35** **37** **39** **41 43**

484 529 **576** **625** 676 729 784 841
45 **47** *49* **51** **53** **55 57**

841 900 961 1024 1089 1156 1225 1296
59 **61** **63** **65** **67** **69 71**

1296 1369 1444 1521 **1600 1681**
73 **75** **77** **79 81**

Sotto l'elenco dei quadrati ho scritto l'elenco delle differenze: sono numeri dispari e ci sono proprio tutti, in ordine progressivo; per maggiore chiarezza ho ripetuto all'inizio di ogni riga l'ultimo quadrato della riga precedente. Ho evidenziato, tra i numeri dispari, ogni quadrato, assieme ai due quadrati di cui esso è differenza. In questo elenco ci sono tre nuove terne di quadrati,

25 + 144 = 169 49 + 576 = 625 81 + 1600 = 1681 dalle quali

deduciamo le terne di numeri

5 12 13 7 24

25 9 40 41

che godono della proprietà richiesta, che la somma dei quadrati dei due numeri più piccoli sia uguale al quadrato del terzo: ecco qui tre nuove terne pitagoriche.

Proseguendo con l'elenco ne troveremmo altre, perché tra i numeri dispari ci saranno sempre nuovi quadrati ed il limite è dato solo dalla voglia e dal tempo a disposizione.

Quella che abbiamo scoperto è una famiglia di terne, tutte accomunate da due caratteristiche: il numero minore è sempre dispari e gli altri due sono tra loro consecutivi. Il capostipite della famiglia è la terna 3, 4, 5 e la sua discendenza è infinita.

Generiamo nuovi membri della famiglia proseguendo con la compilazione dell'elenco; è un metodo laborioso ed è naturale che venga un tantino a noia.

Lasciamoci ispirare dalla pigrizia e cerchiamo una via più breve, proponiamoci di scrìvere la prossima terna senza scrìvere tutta la porzione di elenco che ad essa ci condurrebbe.

Essa comincia con il numero 11 poiché l'ultima determinata comincia con 9. ciò significa che ad un certo punto la differenza tra un quadrato e il successivo sarà 11^2 =121; immaginiamo di cercare il numero 121, facendo scorrere la punta dell'indice lungo l'elenco delle differenze... con l'ultima terna siamo arrivati al numero dispari 9^2 = 81 e 121-81 = 40, quindi il nostro polpastrello correrà per 40 posizioni... un momento!, nell'elenco delle differenze ci sono solo i numeri dispari, quindi le posizioni sono solo 20.

Spostiamo il nostro indice sull'elenco dei quadrati: lo posiamo sul numero 1600, il quadrato di 40 che è il numero intermedio della terna 9, 40, 41; da lì dobbiamo muoverci di 20 posizioni ed arriviamo al quadrato di 60, 3600, seguito dal quadrato di 61, 3721.

n nostro ragionamento ci ha condotti con un balzo a questa porzione di elenco:

3481 **3600** **3721** 3844

119 **121 123**

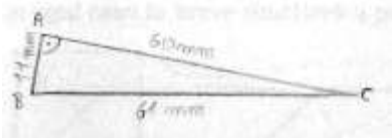
e tutto questo senza scrivere i quadrati che la precedono.

Abbiamo in tal modo generato, come ci eravamo proposti, un nuovo discendente di 3, 4, 5:

11 60 61

Il metodo delineato è più veloce della compilazione dell'elenco completo, ma richiede di avere già capito un po' il meccanismo in azione. Se ritenete di essere a questo livello provate a calcolare la prossima terna.

Annodiamo ad intervalli regolari un anello di corda, così che sia suddiviso in 132 porzioni di uguale lunghezza. Con due paletti tendiamo una parte di questo anello, compresa tra due nodi che distano tra loro 61 unità; un terzo paletto va posto a l i nodi di distanza dal primo e 60 nodi dal secondo paletto, o viceversa, non importa: con esso mettiamo in tensione tutta la corda e completiamo la costruzione del triangolo 11, 60, 61 (se state verificando che 11 + 60 + 61 faccia 132 dimostrate un adeguata presenza di spirito). Questo triangolo è rettangolo tra



i lati I l e 60. E qualunque sia la terna che scegliamo tra le infinite che si possono generare, il triangolo costruito con essa è rettangolo tra i due lati minori. Senza procedere effettivamente alla costruzione sappiamo già che le cose devono stare così, sappiamo a priori che l'angolo tra i due lati minori sarà retto. Perché?

Abbiamo a questo punto la sensazione che la risposta abbia a che fare con il teorema di Pitagora e con la proprietà fondamentale delle terne pitagoriche.

Vorremmo mostrare che questa proprietà *{premessa)* obbliga un triangolo costruito con una terna ad essere rettangolo *(conclusione)* e che il passaggio dalla premessa alla conclusione è garantito dal teorema stesso. Per chiarire la questione riformuliamo il suo contenuto in questo modo:

se allora	un *triangolo* *è rettangolo*	„	*Il quadrato costruito sull'ipotenusa equivale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

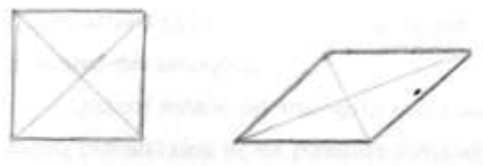
In tal modo è evidente che la proprietà di un triangolo di essere rettangolo è, nel teorema, premessa e non conclusione; anche l'equivalenza tra superfici si trova nella posizione sbagliata del teorema perché ne è conclusione e non premessa.

Possiamo azzardarci a scambiar tra loro premesse e conclusioni? Vediamo cosa risulta da questa ardita operazione:

se *(in un triangolo)*	*il quadrato costruito sul lato maggiore equivale alla somma dei* . ... *quadrati costruiti sui lati minori*	*allora* *(il triangolo)*	-______ , *e rettangolo*

Se quest'ultima affermazione è vera allora è altrettanto vero che ad ogni terna pitagorica corrisponde un triangolo rettangolo e dunque essa è l'anello logico che cercavamo.

Senonché il teorema così ribaltato non è più il teorema di Pitagora ma il suo inverso. Siamo certi della sua validità? Lasciate che susciti in voi qualche dubbio: in ogni caso in breve rimetterò a posto tutto.



Considerate ■ questa affermazione elementare:

Se una figura è un quadrato allora ha quattro lati uguali.

La sua inversa non è vera, perché un quadrilatero con quattro lati uguali potrebbe essere un rombo.

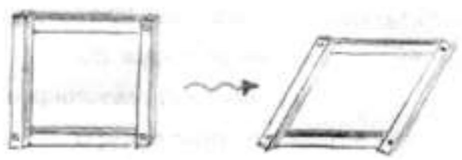
Tra i rombi il quadrato si distingue, ad esempio, per avere le diagonali tra loro congruenti, quindi possiamo ribaltare l'implicazione solo aggiungendo questa condizione:

Se un quadrilatero ha quattro lati uguali e le diagonali tra loro congruenti, allora è un quadrato.

I falegnami sanno bene che per "mettere in squadra" un mobile è necessaria la verifica dell'uguaglianza delle diagonali, solo così si ha la certezza che i fianchi del mobile siano tra loro perpendicolari. Non potrebbe essere necessaria una verifica analoga per i triangoli costruiti con le terne pitagoriche?

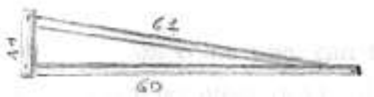
Così come esistono, ad esempio, quadrilateri con i lati tutti uguali tra loro che non sono quadrati, non potremmo magari costruire un qualche triangolo di lati 11, 60, 61 che non sia rettangolo?

La risposta è no, perché i triangoli godono di una proprietà che li rende unici tra i poligoni.



Se realizziamo un telaio quadrato in legno, con i lati collegati da perni che li lascino liberi di ruotare l'uno rispetto all'altro, esso potrà essere deformato in un rombo senza compromettere l'integrità dei lati.

Costruiamo ora un telaio triangolare in questo modo: due lati misurano 11 e 60 in qualche unità di misura e sono perpendicolari tra loro; dato che $11^2 + 60^2 = 3721$ e che $\sqrt{3721} = 61$, il teorema di Pitagora stabilisce che il terzo lato misura 61. Questo telaio, a differenza di quello quadrato (o di qualunque altra forma poligonale) non potrà essere deformato senza deformarne anche i lati, cambiandone la lunghezza, e questa è una proprietà esclusiva dei triangoli.



Quindi esiste un triangolo con i lati 11, 60, 61, è unico nel senso che con questi numeri non se ne possono costruire altri, ed è rettangolo.

Questa rigidità intrinseca dei triangoli è ampiamente utilizzata in ingegneria (e architettura): osservate ad esempio come è realizzato il telaio di una gru.

In termini più formali, diremo che l'inverso del teorema di Pitagora **è** vero come il teorema stesso, e questo garantisce che ogni terna pitagorica sia di fatto un triangolo rettangolo.

Una formula per le terne

"Chiamatemi algoritmo.

Sono una procedura progettata per la soluzione di un problema; per mettermi in atto **è** necessario ripetere (iterare) un nucleo di operazioni fino a quando l'obbiettivo viene raggiunto.

Mi avete utilizzato nella caccia alle terne pitagoriche: calcola il quadrato di un numero, calcola il quadrato successivo, calcola la loro differenza: se questa è un quadrato hai trovato una nuova terna, altrimenti continua con il numero seguente."

Gli algoritmi sono particolarmente adatti quando abbiamo a nostra disposizione un calcolatore elettronico, dato il grande numero di calcoli che in genere essi comportano e il loro carattere ripetitivo (in altri termini: sono noiosi).

Un algoritmo elementare può essere usato per la costruzione dei numeri dispari; esso funziona così:

- il primo numero dispari **è** 1;
- il successivo numero dispari si ottiene aggiungendo 2;

la seconda operazione viene ripetuta per raggiungere la posizione desiderata nell'elenco dei numeri dispari:

1 —^->3—g-> 5 -^?->7—g->9

il numero 9 si ottiene aggiungendo 4 volte 2 oppure, in un colpo solo, con il calcolo 9 = 2 - 4 + 1. Un calcolo analogo vale per tutti i dispari: per ottenere 11, 13, 15, ... è sufficiente sostituire al numero 4 i numeri 5, 6, 7, ... In generale un numero dispari può essere calcolato con la formula

numero dispari = 2/t + 1

una volta convenuto che k può assumere come valore un qualsiasi numero naturale.
Visualizziamo meglio la situazione con questa tabella:

k	0	1	2	3	4	5 -
$2k+ì$	1	3	5	7	9	11 •••

Siamo passati dall'algoritmo alla formula ed il vantaggio è che la formula è più maneggevole; ad esempio il numero dispari in posizione 0 è 1, e in posizione 112 troviamo 2 - 1 1 2 + 1 = 225, senza dover aggiungere 112 volte 2. In questo contesto possiamo pensare a k come ad un numero d'ordine che da la posizione di un numero disparì qualsiasi nell'elenco che li contiene tutti.

Proponiamoci di dedurre la formula per calcolare le terne della famiglia di 3, 4, 5.

Questa famiglia, abbiamo visto, è caratterizzata da due proprietà: delle due scegliamo la seconda come punto di partenza, e diamoci da fare con l'algebra.

Stiamo affermando che il cateto maggiore e l'ipotenusa sono numeri consecutivi, e per amore di brevità (e algebra) scriveremo così:

$$\textit{cateto}_{\textit{maggiore}} = n$$

$$\textit{ipotenusa} = n + 1$$

Ora dichiariamo che la terna che stiamo costruendo è pitagorica scrivendo l'uguaglianza caratteristica (e dopo averla scritta sviluppiamola e semplifichiamola)

' *cateto* } „ ,
jmnore) + n^2 = *(n + lf,*

(*cateto* V , I
+ n^2 = n^2 + *2n* + L
nanore)

(*cateto* V
jmnore^ = 2n + 1.

L'ultima formula dice che il cateto minore è un numero disparì: difatti se il quadrato di un numero è disparì anche il numero lo è (il quadrato di un numero pari è pari). Così vediamo che dal fatto che cateto maggiore ed ipotenusa sono consecutivi deduciamo, attraverso il teorema di Pitagora, che il cateto minore è dispari.

In qualità di numero dispari esso può essere espresso con la formula generale

$$\textit{cateto}_{\textit{minore}} = 2k + l$$

(attenzione: non possiamo usare la lettera n perché, nella lista dei numeri dispari, un numero non occupa la stessa posizione del suo quadrato). Inseriamo questa formula nella precedente e otteniamo:

(2fc + *lf* = 2n + 1.

Nel seguito consideriamo *k* come assegnato ed *n* come incognita, e sviluppiamo la formula come se fosse un'equazione per determinare *n*. Anzitutto scambiamo i due Iati dell'uguaglianza e poi sviluppiamo il quadrato:

2n + 1 = (2fc + $1)^2$ 2n + 1 =
$4fc^2$ + 4fc + 1 2n = $4fc^2$
+ 4fc

dividiamo l'ultima formula per 2 ed otteniamo

$$n = 2k^2 + 2k.$$

Abbiamo realizzato il compito proposto, di trovare una formula per le terne: k è un numero d'ordine con il quale possiamo calcolare sia il cateto minore sia il maggiore (e aggiungendo 1 anche l'ipotenusa).

Mettiamo alla prova la nostra algebra costruendo un elenco di terne:

(numero d'ordine) k	*(cateto minore)* $2k+l$	*(cateto maggiore)* $2k^2+2k$	*(ipotenusa)* 2fc^2 + $2k$+1
0	1	0	1
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113

(l'elenco si costruisce sostituendo il valore di k nelle formule). Per fc = 0 otteniamo qualcosa di curioso: la terna degenere 1 , 0 , 1, nella quale un cateto si annulla (e il cateto maggiore si scambia di posto con il minore). Prendiamo nota di questa circostanza e mettiamola da parte: questo bizzarro precursore di 3,4, 5 non è molto utile in geometria.

Per k = 1, 2,3,4,5 ritroviamo le cinque terne già costruite, e questa osservazione ci riempie di fiducia nei confronti delle nostre formule.

Per $k = 6, 7$ troviamo due nuove terne (eravate riusciti a costruire 13, 84,

85?).

Le tre formule sostituiscono l'algoritmo: se rileggete la prima e la seconda parte di questo capitolo vedete che sono fondate sulla proprietà che lega numeri dispari e numeri quadrati, la stessa proprietà dalla quale siamo partiti per elaborare l'algoritmo.

La loro deduzione è in generale materia troppo astratta anche per un'ottava classe, anche se spesso sono gli allievi stessi a chiedere se per caso non esiste una strada più breve che sostituisca l'elenco dei quadrati, e non è difficile, una volta che la richiesta viene formulata, mostrare loro che la scorciatoia deve essere fatta di formule.

Ritengo che si debbano mostrare queste formule a lezione, ponendo come obbiettivo capire come funzionano; inoltre è possibile condurre gli allievi ad una verifica a posteriori della loro validità, mostrando che l'uguaglianza

(2fc + lf + (2/fc^2 + $2kf$ = $(2k^2 + 2k + lf$ è

verificata per ogni valore di k (basta eseguire il calcolo diretto).

La storia continua.

Pur essendo infinita questa famiglia di terne generata da 3, 4, 5, di essa non può far parte 8, 15, 17: cateto maggiore ed ipotenusa non sono consecutivi, differiscono di 2, ed il cateto minore è pari.

Vediamo qui la possibilità che esista almeno un'altra famiglia di terne, caratterizzate dal fatto che cateto maggiore ed ipotenusa differiscano sempre di 2 unità.

Procedendo similmente a quanto fatto per la prima famiglia si trovano le tre formule

cateto
4fc
minore
cateto **i**
= 4 f c ^{2} - 1
maggiore

ipotenusa = 4fc^2 +1

osserviamo in primo luogo che tra la seconda e la terza formula il salto è sempre di **2** unità.

Per verificare poi che le tre espressioni definiscano effettivamente una terna pitagorica, calcoliamo da una parte (4k)^2 + (4fc^2 - ljP e dall'altra (4fc^2 + *lf* e

vediamo che in entrambi i casi il risultato è *16k** + 8fc^2 +1.

Ora costruiamo un elenco per i primi membri di questa nuova famiglia.

k	4fc	4 f c ^{2} -1	4fc^2 + 1
0	0	- 1	1
1	4	3	5
2	8	15	17
3	12	35	37
4	16	63	65
5	20	99	101
6	24	143	145
7	28	195	197

Troviamo in posizione 0 un nuovo bizzarro antenato che nulla sembra avere a che fare con la vecchia, cara geometria. In posizione 1, fatto inatteso, ritroviamo la terna più famosa: scritta in questo ordine appare sotto una nuova luce.

In posizione calcoliamo 8, 15, 17, la terna che ha ispirato la ricerca di questa nuova famiglia, e da qui in avanti calcoliamo per ogni valore di k un nuovo membro.

E se ci fossero nuove, inattese famiglie di terne? Esiste un gruppo di formule che permetta di generarle tutte?

Si, ci sono. Si, esiste.

v»r i v*o*ibili terne Le

formule che in un solo colpo esprimono tutte le possi

pitagoriche coinvolgono non una ma due lettere. Esse sono

primo cateto	*secondo cateto*	*ipotenusa*
$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + D^2$

(il terzo numero è il maggiore, qualunque sia la coppia di valori attribuita ad a e b, quindi rappresenta l'ipotenusa); con il calcolo diretto verifichiamo che $(a^2 - b^2) + (2abf$ da lo stesso risultato di $(a^2 + b^2 f$, dunque la proprietà generale è soddisfatta.

Otteniamo una nuova terna fissando sia il valore di a sia quello di b: ad esempio per $a = 2$ e b - $ì$ troviamo i numeri 3, 4, 5 e per $a = 4$ e $b = 1$ troviamo 8, 15, 17.

Con formule così generali possiamo trovare terne che non rientrano in alcuno dei due elenchi che abbiamo costruito: ad esempio per $a = 7$ e $b = 4$ troviamo la terna 33, 56, 65.

Purtroppo, oltre alle terne vere e proprie, si trovano anche i loro multipli: ad esempio per $a = 3$ e b -2 troviamo 5, 12, 13 e per $a = 5$ e $b = 1$ troviamo 24, 10, 26, terna che, ordine dei suoi membri a parte, è il doppio della precedente.

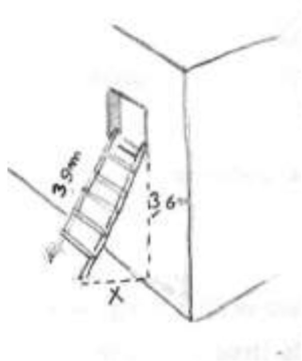
Dunque queste formule sono abbastanza complicate da utilizzare e potete tirare un sospiro di sollievo perché non intendo procedere oltre.

Vi sono infinite famiglie di terne pitagoriche e ciascuna famiglia ha infiniti elementi. Eppure esse non sono altro che uno spolverio di stelle razionali che punteggiano il denso, scuro cielo dei triangoli rettangoli che non hanno, come misure dei lati, né numeri interi né numeri razionali, bensì i misteriosi irrazionali.

roblemi risolubili con U teorema di Pitagora

Problema 1

Abbiamo a disposizione una scala lunga 3,9 m e dobbiamo raggiungere una finestra posta a 3,6 m dal suolo. A che distanza dal muro devono essere appoggiati i piedi della scala?



In questo problema la lunghezza della scala e l'altezza della finestra sono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo, mentre la distanza richiesta (nel seguito indicata con *x)* *è* l'altro cateto. Il teorema di Pitagora ci dice che

$$(3,6mf+x^2 = (3,9m)^2$$

Il quadrato di 3,6 e il quadrato di 3,9 possono essere ovviamente calcolati in colonna, ma dobbiamo a poco a poco abituare gli studenti ad eseguirli a mente.

Come si fa? Come per tutto il calcolo numerico è necessaria soprattutto una buona memoria. In questo caso l'idea è che durante le lezioni di algebra si deve esercitare una lista di quadrati a memoria, possibilmente dei numeri da 1 a 50. In particolare

36^2 = 1296 *e quindi* $3,6^2$ = 12,96 39^2 =
1521 e *quindi* $3,9^2$ | 15,21

È molto importante familiarizzare con la posizione della virgola decimale. Se sposto in un numero la virgola di una posizione, nel quadrato del numero essa va spostata di due posizioni.

La relazione che esprime il teorema di Pitagora pertanto diventa

$$12,96\ m^2 + x^2 = 15,21\ m^5$$

Per procedere dobbiamo "isolare x^2", ossia lasciare questo termine solo a sinistra dell'uguale, il che si realizza spostando 12,96 m^2 a sinistra cosi:

$$x^2 = 15,2\ lm^2 - 12,96\ m^2.$$

Avete familiarità con questa operazione? E gli studenti? Nella prima uguaglianza vediamo che x^a **è** la parte che manca a 12,96m^a per ottenere 15,21m^2 e quindi è la differenza espressa nella seconda uguaglianza. Il risultato della sottrazione è 2,2 5 m ^{2} e **COSÌ**

$$x^2 = 2,25m^2.$$

Ora dobbiamo trovare un numero, *x,* il cui quadrato **è** 2,25 m^2, ossia

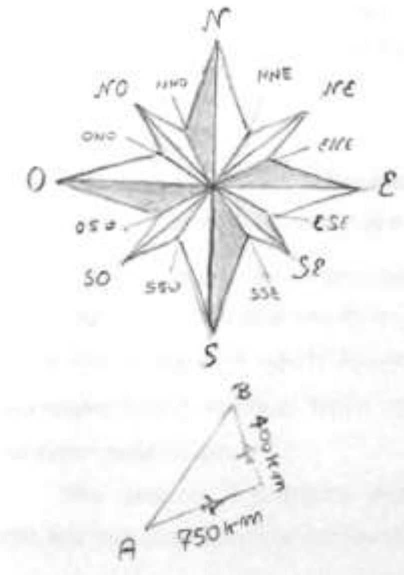
$x = $ ^2,25 m.

Anche per il calcolo di questa radice **è** comodo sapere un po' di quadrati a memoria. Se ricordate che $15^2 = 225$ vedete che ***1J5²*** = 2,25 e infine

$$x = 1{,}5 \text{ m}.$$

La risposta al problema allora **è** che i piedi della scala devono poggiare a 1,5 m dal muro. Naturalmente questa **è** solo la distanza massima, avvicinando i piedi al muro raggiungiamo un'altezza maggiore.

Problema 2



Un aeroplano viaggia per 750 km in direzione ENE e per 400 km in direzione NNO. A che distanza si trova, alla fine di questo percorso, dal punto di partenza?

Se consultiamo la rosa dei venti vediamo che le direzioni ENE e NNO sono tra loro perpendicolari, quindi abbiamo un grande trangolo rettangolo con i cateti lunghi 750 km e 400 km. Il teorema di Pitagora in questo caso dice che

$x^2 = (750 \text{ km})^2 + (400 \text{ km})^2$

(quando l'ipotenusa **è** il lato incognito conviene scriverla a sinistra; ricordo che un'uguaglianza si può leggere in entrambi i sensi).

Notiamo che $75^3 = 5625$ e $4^a = 16$ così (contate bene gli "zeri")

$x^2 = 562500 \text{ km}^3 + 160000$

$\text{km}^3\, x^a = 722500 \text{ km}^3$

Ora dobbiamo calcolare V722500 ... non sembra facile!

Teniamo presente che nelle classi medie non si dovrebbe (non si devel) usare la calcolatrice. Esiste un metodo generale per l'estrazione della radice quadrata ma, se si può, è bene cercare metodi più veloci caso per caso.

Qui vediamo che possiamo calcolare V7225 e poi aggiungere uno "0" al risultato; per questa radice procediamo anzitutto alla scomposizione in fattori:

7225	5
1445	5
289	17
17	17
"H	

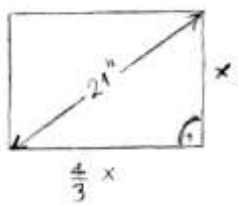
$7225 = 5^2 \cdot 17^3$

(per capire che 17 è l'unico divisore primo di 289 bisogna ricordare che IT^2 = 289). Ora scriviamo la scomposizione in un modo leggermente diverso, così:

$$7225 = (5 \cdot 17)^2$$

vale a dire che 7225 è il quadrato di 5 • 17 = 85 e quindi V7225 = 85. L'aereo si è allontanato di 850 km dal punto di partenza.

Problema 3



Uno schermo televisivo (ultrapiatto, se preferite) di formato tradizionale misura 21 pollici. Quanto sono lunghi i suoi lati?

Per misura di uno schermo televisivo si intende la misura della sua diagonale; negli schermi di formato tradizionale il rapporto tra il lato maggiore e quello minore è 4/3 (negli ultimi anni si sta imponendo il formato 16/9). Supponiamo che lo schermo in questione sia di formato tradizionale.

Per risolvere il problema dobbiamo usare le frazioni. Dato che abbiamo a che fare con uno schermo tradizionale scrìviamo

lato 4 f *lato* \

maggiore 3 [*minore J* o, più algebricamente!

lato

minore

lato **4** = —*x* *maggiore*
3

cosi abbiamo un triangolo rettangolo con cateti x e 4/3 x e ipotenusa lunga 21" (il doppio accento indica l'unità di misura "pollice"). Il teorema di Pitagora dice che

x^2+(±xj=(21")^2

Per trovare x adottiamo un atteggiamento pigro: cerchiamo di calcolare il meno possibile; in particolare *non* calcoliamo 21^2 (anche se sapete tutti che fa 441). I calcoli a sinistra vanno svolti, altimenti non possiamo procedere; dunque:

*a + 1 6 x 2 /21.)2 9 V

' 9x^2 +16x^2 _(2V, y

^fEl = (21")^{2}9 V
?

Tutto bene con il secondo passaggio? Deve essere chiaro (ma in genere per uno studente delle medie non lo è) che x^2 = lx^2 perché non vedendo alcun numero vicino a x^2 molti pensano che questo numero che non c'è sia qualcosa tipo "0" e

poi, con scarsissima coerenza, saltano fuori risultati tipo x^2 +—x^2 "="—x^4 o
9 9

*$2x^2$! 9

Ora isoliamo x^2. Sembra facile...

Anche qui capita di vedere di tutto. È facile imbattersi in studenti che "portando 25/9 dall'altra parte" trovano (2 *l'f* -25/9. Bisogna sempre chiarire che qui abbiamo una moltiplicazione,

$$\frac{25x^2}{9} = \frac{25}{9}x^2$$

e che l'inverso di una moltiplicazione è una divisione.
Quindi

2
5

9

o meglio ancora:

25v '

9 3a
Ora notiamo che — = —*■ e così, se abbiamo un po' di dimestichezza con il 25 5^2
calcolo delle potenze, scriviamo

Leggiamo in termini umani questa equazione: "*x* è quel numero il cui quadrato è uguale al quadrato di63*/5"... Ciò significa che

$$x = \frac{63'}{5}$$

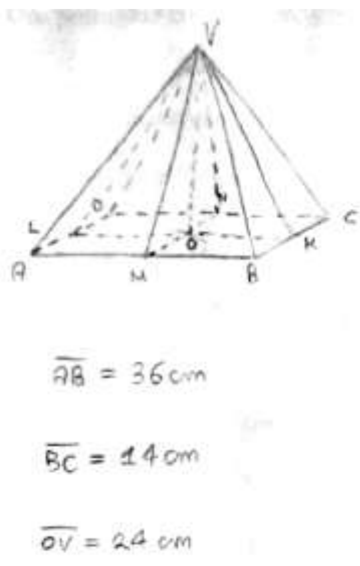
(in pratica abbiamo semplificato i due quadrati, lo possiamo fare con una lineetta su ciascun "2" così:

x^2 = f~^~J)•

Dato che 63:5 = 12,6 la risposta alla domanda è: *lato*
= 12,6"
minore
lato 4
= -12,6' = 16,8"
maggiore 3

Il pollice è una unità di misura inglese ormai utilizzata solo nel mondo anglosassone *(grazie* a Dio e soprattutto alla Rivoluzione Francese). Per sapere quanto misura in centimetri lo schermo della nostra televisione dobbiamo sapere che 1" = 2,54 cm.

Problema 4



Calcola la superficie laterale della piramide e la lunghezza comune dei suoi quattro spigoli obliqui.

La superficie laterale della piramide è composta di quattro porzioni triangolar^ congruenti due a due: da una parte la coppia

A A

di triangoli *A BV* e C *D V* e dall'altra la coppia

BCV e *DA V*.

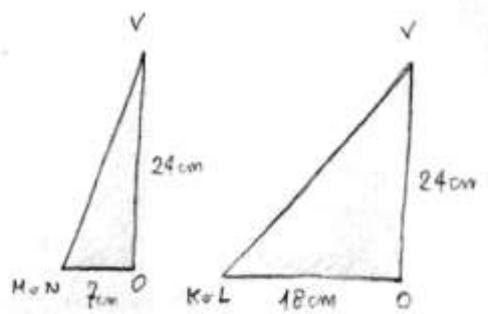
Per calcolare la superficie di questi triangoli abbiamo bisogno delle loro *altezze,* che in quanto elementi della piramide vengono chiamati apotemi. Dobbiamo cioè sapere le misure *MV* = *NV* e *KV* = *LV* ; per fare questo ci serviamo dei triangoli rettangoli che hanno come cateto comune l'altezza della piramide. Disegnamo per maggior chiarezza questi triangoli scorporandoli dal resto della figura. Nel primo dei due dovremmo riconoscere che i due cateti sono i primi due numeri della terna 7, 24, 25 e quindi

MV = W = 25cm

Per il secondo (che pure è basato su una terna) procediamo con l'applicazione diretta del teorema di Pitagora:

ipotenusa^2 = (18 cm)^2 + (24 cm)^2 *ipotenusa*^{2} = 324 cm^2 + 576 cm^2 *ipotenusa*^{2} = 900 cm^2

ipotenusa = 30 cm quindi *KV* = *LV* = 30 cm



(riconoscete quale terna soggiacie al triangolo in questione?).

Ora possiamo calcolare le aree richieste delle facce laterali:

area del triangolo A BV ^ *area del triangolo C DV* ^ 2 = 32cm-24cm *M a* = 432 cm^2

area del triangolo BCV ^ = *area del triangolo A DV* ^ ~" i4cm 24cm L, 2 O = *168Cm* *area laterale* = 2 • 432 cm² + 2 - 1 6 8 cm² = = 864

cm² + 336 cm² = =1200cm²

Naturalmente nel calcolo delle aree si potrebbe evitare di dividere per 2, visto che subito dopo si raddoppia, ma bisogna essere sicuri che questo non generi confusione.

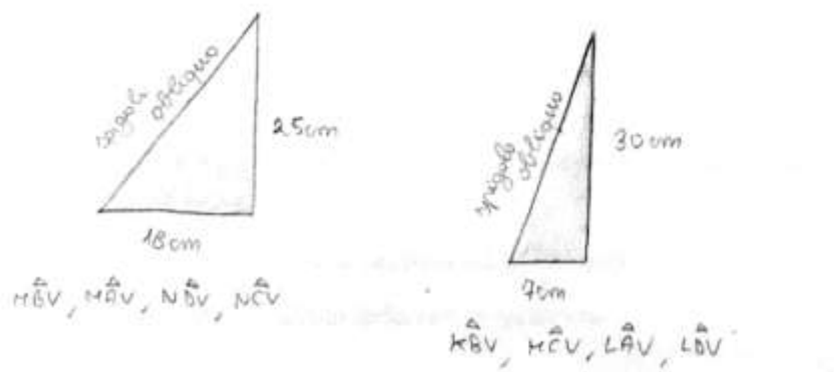
Passiamo al calcolo della lunghezza degli spigoli obliqui. La loro misura

A

comune è anche l'ipotenusa dei quattro triangoli rettangoli congruenti MBV,

A A AA

MAV, NDV, NCV oppure dei quattro triangoli rettangoli congruenti KBV, KCV, LAV, LDV.



Possiamo pertanto ricavare questa misura seguendo due strade diverse, che devono convergere sullo stesso valore:

*(spigolo}*² *[obliquo)*	= (lScm)³ +(25cm)ª =	*(spigolo}* o \pbUquOj	= *(7cmf* + (30cm)³ =
	= 324 cmª + 625 era³		= 49 cm² + 900 cm²

entrambe le strade conducono al risultato:

'spigolo} *obliquo ;* | 949cm².

Il numero 949 ***non*** è un quadrato perfetto e il calcolo della sua radice richiede il metodo generale. Sarebbe troppo lungo spiegare qui i meccanismi che regolano il metodo e pertanto devo ritenere che sia conosciuto oppure che ci si proponga di impararlo in un secondo momento. In Vili classe è essenziale che gli allievi sappiano estrarre le radici quadrate.

Il calcolo di V949 porta al valore approssimato 30,8 (un valore più preciso è 30,805). In effetti 30,8² = 948,64, abbastanza vicino a 949. Dato che non abbiamo un quadrato perfetto non possiamo calcolare tutte le cifre dopo la virgola, che sono infinite e non hanno struttura periodica. Se ci accontentiamo di una cifra dopo la virgola possiamo quindi scrivere

$$\begin{matrix}\text{spigolo}\\ \text{obliquo}\end{matrix} = 30{,}8 \text{ cm.}$$

Considerazioni generali.

Spero di avere mostrato con questi esempi che applicare il teorema di Pitagora per la soluzione dei problemi di geometria comporta diverse difficoltà che si dividono sostanzialmente in due gruppi:

1. difficoltà con la quantità incognita nel teorema di Pitagora;
2. difficoltà che riguardano il calcolo della radice quadrata.

Scrivere la relazione che esprime il teorema di Pitagora quando un lato è sconosciuto significa scrivere un'equazione (di II grado), poi questa equazione va anche risolta.

In proposito desidero proporre una riflessione. I problemi più facili che si incontrano sono di due tipi:

a) dati due cateti trovare l'ipotenusa;

b) dati un cateto e l'ipotenusa trovare l'altro cateto;

Nel primo caso scriviamo il teorema di Pitagora con l'ipotenusa a sinistra dell'uguale cosi:

$$ipotenusa^2 = \begin{pmatrix}primo\\ cateto\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}secondo\\ cateto\end{pmatrix}^2$$

e dato che a destra abbiamo solo numeri l'unica difficoltà è l'estrazione della radice.

Nel secondo caso molti studenti preferiscono ricordare a memoria l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix}secondo\\ cateto\end{pmatrix}^2 = ipotenusa^2 - \begin{pmatrix}primo\\ cateto\end{pmatrix}^2$$

piuttosto che ricavarla con un semplice passaggio.

Naturalmente così facendo devono ricordarsi quando usare l'uguaglianza con il "più" e quando quella con il "meno". Mi è capitato spesso di sentire esclamare frasi come "...ah già questa volta ci vuole il meno!" (e magari un po' più colorite, se gli studenti sono veramente coinvolti dalla lezione).

Da una parte un maestro di matematica vorrebbe sempre che gli allievi capissero il perché di una formula, ma io penso che si debba trovare un equilibrio tra ragionamento e memoria, tra istinto e rigorosa deduzione e sta alla nostra sensibilità dosare questi ingredienti durante una lezione e nel rapporto con i singoli *allievi.*

Spesso mi sembra che i docenti di matematica sottovalutino l'importanza della memoria nello sviluppo di questa materia. Ad esempio, quale studente può seguire un ragionamento, lo svolgimento di un problema, se non conosce la tavola Pitagorica delle moltiplicazioni? Nel caso del teorema di Pitagora poi, sapere " ed eliminando i quadrati dell'ultima linea ai ottiene $u = \frac{\quad}{uj} =$ 4,2 . Ora che sappiamo quanto vale u possiamo calcolare la lunghezza dei lati sostituendo questo valore:

lato maggiore = 4x4,2" *m* 163'

lato ***minore*** ■ 3x4,2* = 12,6"

Qui abbiamo evitato la complicazione tecnica delle frazioni facendoci venire all'inizio una buona idea. Si tratta però di un approccio abbastanza sofisticato e non lo proporrei come primo metodo di soluzione, ma solo in un secondo tempo.

Problemi come questo sono molto complicati per gli allievi delle classi medie e probabilmente non vanno affrontati prima di fine VIII - inizio LX classe, e comunque non prima che l'uso del teorema nei casi elementari sia stato consolidato.

È preferibile proporre in VII ed VIII problemi con facili calcoli, che richiedano soprattutto creatività nel trovare la via per la soluzione.

Il calcolo delle radici quadrate

Un'osservazione sui metodi utilizzati per calcolare la radice quadrata:

1) se riconosciamo che un numero è un quadrato perfetto il calcolo della sua radice è immediato; in questo caso il nostro strumento di calcolo è la memoria;

2) altrimenti, se sospettiamo che un numero sia un quadrato perfetto ma non lo riconosciamo, possiamo scomporlo in fattori primi come nel caso di $7225 = (5 \cdot 17)^2$; in questo caso nostri strumenti sono la scomposizione e le regole delle potenze;

3) se il numero ci sembra proprio brutto brutto allora dobbiamo rassegnarci ed estrarre la sua radice con il metodo generale (magari prima impariamo questo metodo una volta per tutte);

esiste infine una quarta possibilità che a mio avviso andrebbe esercitata frequentemente:

memoria'quando ci vuole 11 segno "meno* significa quantomeno avere ben compreso che l'ipotenusa è il lato più lungo del triangolo rettangolo, non vi pare? E non è poco.

In tutti e quattro i problemi che ho proposto vi **è** poi un'altra difficoltà (che mi sembra evidente perlomeno nel quarto): individuare il triangolo rettangolo "risolutore*.

Acquisire questa capacità deve essere un obbiettivo delle lezioni di geometria, obbiettivo che in genere può essere raggiunto solo con molta pazienza e gradualmente. Si può cominciare proponendo e riproponendo quei problemi un po' noiosetti che cominciano con la frase "In un triangolo rettangolo...*: problemi siffatti sono buoni per imparare le tecniche di soluzione; d'altra parte essi non richiedono un briciolo di creatività.

Problemi come il quarto (a patto che non vengano riproposti sempre gli stessi) invece stimolano lo studente a cercare una strada per la soluzione, ad essere creativo: essi possono essere introdotti in una seconda fase, quando l'uso del teorema di Pitagora sia ormai aquisito.

Dei quattro quello tecnicamente più difficile è il terzo. I valori sconosciuti, infatti, sono due, entrambi i cateti, e prima di applicare il teorema abbiamo dovuto ricondurli alla stessa incognita; quello proposto è il metodo più diretto ma è complicato dal fatto che richiede l'uso delle frazioni. Ne propongo qui un altro.

Dato che il rapporto tra i lati è 4/3 esiste un'unità di lunghezza u per mezzo della quale possiamo scrivere

lato lato

4u, 3u maggiore minore

e così il teorema di Pitagora diventa

$$(4u)^2+(3u)^2=(21')^2$$

$$16u^2+9u^2=(21')^2$$

$$25u^2=(21')^2$$

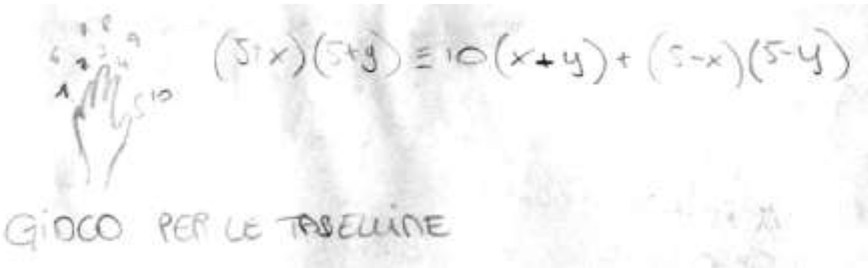
$$(5u)^2=(21')^2$$

4) se riconosciamo nei dati del problema due dei numeri di una terna pitagorica, allora il valore incognito è il terzo numero della terna; in questo caso lo strumento che usiamo è la memoria, necessaria per ricordare un numero adeguato di terne pitagoriche;

Nell'ultimo caso dobbiamo però stare attenti: se ad esempio i due cateti sono 5 e 12 l'ipotenusa è 13, se un cateto è 24 e l'ipotenusa è 25 allora l'altro cateto è 7, ma se l'ipotenusa 15 e un cateto è 8 l'altro cateto *non* **è** 17, perché nella terna 8, 15, 17 8 e 15 sono i cateti.

***I** due aspetti del teorema*

Dobbiamo procedere con molta cautela dalla formulazione del teorema di Pitagora come equivalenza di superfici, tema centrale in settima e ottava classe, alla sua applicazione e non dovremmo saltare alcun passaggio, altrimenti rischiamo di lasciare per strada buona parte della classe.



CONCLUSIONI

Eccomi giunto alla fine di questo cammino. Spero che siate ancora tutti qui e che vi sentiate bene.

Le tappe principali che abbiamo toccato sono queste:

1) il teorema di Pitagora stabilisce un'equivalenza tra superaci;

2) quando introduciamo l'unità di misura l'equivalenza è espressa da un'uguaglianza numerica;

3) in quanto uguaglianza numerica il teorma determina un lato del triangolo rettangolo a partire dagli altri due;

4) in un triangolo rettangolo almeno un lato ha misura espressa da un numero irrazionale... .

5) ... a meno che non ci troviamo di fronte a una terna pitatgorica; per quanto esistano infinite infinità di terne , esse rimangono splendidi casi isolati tra i triangoli "irrazionali".

Decideremo ad ogni nuovo ciclo di insegnamento quale materiale portare incontro agli allievi e quanto approfondire ogni singola questione. Possiamo però fare riferimento ad alcuni punti fermi attorno ai quali articolare un'epoca.

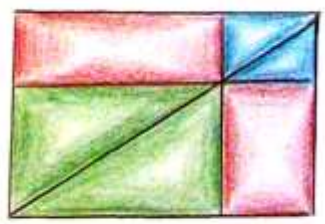
Il teorema di Pitagora come equivalenza di superfici viene introdotto in VII classe. Si può partire dalla **saccessione di triangoli isosceli** per dimostrare il teorema nel caso speciale dei triangoli rettangoli isosceli: in questa dimostrazione gli allievi cominciano a scomporre le figure e a ricomporle diversamente, ottenendone di nuove.

Per dimostrare il caso generale la figura della **tavoletta indiana** è la via maestra, insieme semplice e suggestiva; le altre dimostrazioni, ottenute ritagliando il quadrato dell'ipotenusa e ricomponendo le parti per costruire i quadrati dei cateti, andrebbero portate come approfondimento, in modo pratico (carta e forbici oppure legno, poi disegno) limitando i ragionamenti ai passaggi più significativi - oppure omettendoli del tutto.

Solo a questo punto possiamo cominciare a prendere in considerazione gli **aspetti numerici,** con cautela e senza pretendere da subito il calcolo di un lato a partire dagli altri due. A questo punto ricordiamo che la lista dei quadrati a memoria va portata in VII classe e che l'estrazione della radice quadrata si porta solo a fine VII - inizio Vili classe.

Solo in Vili classe la **soluzione dei problemi** diventa un obbiettivo da perseguire con sistematicità ed è solo a partire d ali Vili che si parla di **terne pitagoriche.** L'equivalenza di superfici di forma diversa è tema di Vili, in VII limitiamoci a ritagliare e ricomporre le figure. Tutta la problematica dei **numeri irrazionali** è materia delicata e si parla esplicitamente di questi numeri a partire dalla IX classe; penso però che sia importante che anche in VII e Vili il docente abbia le idee chiare in proposito e che lasci cadere nei solichi della lezione qualche seme per le classi superiori, affinché il sonno faccia di questi semi una messe abbondante.

Più in generale, ogni volta che presentiamo una situazione geometrica, cerchiamo di mostrarne l'evoluzione, possibilmente sotto più punti di vista; ho fatto così per il teorema di Talete sui triangoli rettangoli nella semicirconferenza, ad esempio, variando sia la posizione del vertice sia la posizione della base. Cosi facendo portiamo l'attenzione degli studenti sulla generalità di una



FINE (per ora) 12

gennaio 2005

affermazione o sui suoi limiti e la inseriamo in un contesto "vivente".