# Algebra 7a classe

## 1. Dal calcolo numerico al calcolo algebrico

### 1) Moltiplicazione soddividendo un fattore in sommandi

Come moltiplichiamo 7 • 23 ?

23 può essere riscritto in 20 + 3, quindi:

$7 \cdot 23 = 7 \cdot (20 + 3) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 = 140 + 21 = 161$

**es. per i ragazzi 8 • 34**

**es. per i ragazzi 9 • 74**

idem per 65 • 9

### 2) Moltiplicando di 3 cifre

Se il *multiplicatore* è una numero ad una cifra, il *moltiplicando* può essere anche più grande, senza avere problemi di calcolo mentale:

$3 \cdot 235 = 3 \cdot (200 + 30 + 5) = 3 \cdot 200 + 3 \cdot 30 + 3 \cdot 5 = 600 + 90 + 15 =$

$= 705$

**es. per i ragazzi 5 • 756**

**es. per i ragazzi 8 • 912**

### 3) Entrambi i fattori composti da 2 cifre

Se entrambi il *moltiplicatore* ed il *moltiplicando* sono di 2 cifre, possiamo quindi suddividere entrambi i termini in sommandi:

15 • 27 = (10 + 5) • (20 + 7) = 10 • 20 + 10 • 7 + 5 • 20 + 5 • 7 = 200 + 70 + + 100 + 35 = 405

! si può fare anche a stadi:

15 • 27 = (10 + 5) • 27 = 10 • 27 + 5 • 27 = 10 • (20 + 7) + 5 • (20 + 7) = = 10 • 20 + 10 • 7 + 5 • 20 + 5 • 7 = 200 + 70 + 100 + 35 = 405

**es. per i ragazzi 28 • 74**

**es. per i ragazzi 32 • 43**

**es. per i ragazzi 85 • 29**

## 4) Confronto con la moltiplicazione classica

Si può a questo punto anche fare il calcolo immediatamente:

43 • 35 = (40 + 3) • (30 + 5) = 1200 + 200 + 90 + 15 = 1505

abbiamo anche un confronto con il calcolo moltiplicatorio normale:

| | | |
|---|---|---|
| 35 • | oppure | 43 • |
| 43 | | 35 |
| 105 | | 215 |
| 140- | | 129- |
| 1505 | | 1505 |

Si riconoscono nella moltiplicazione parziale del metodo classico somme ottenute anche con il metodo delle parentesi

per es. 105 = 90 + 15 e 1290 = 1200 + 90

## 5) Suddivisione in altri sommandi

La suddivisione in 2 sommandi può essere eseguita anche usando altri sommandi senza usare per forza il 10 o un suo multiplo:

15 • 13 = (10 + 5) • (10 + 3) = 100 + 30 + 50 + 15 =195
ma anche

15 • 13 = (9 + 6) • (8 + 5) = 72 + 45 + 48 + 30 = 195

**es. da far fare ai ragazzi assegnando diversi sommandi:**
**18 • 12**
**1° gruppo: (10 + 8) • (10 + 2)**
**2° gruppo: (11 + 7) • (9 + 3)**
**3° gruppo: (12 + 6) • (8 + 4)**

Ci sono moltissime possibili combinazioni che danno sempre valori intermedi diversi, ma alla fine il totale sarà sempre 195!!

### 6) Passaggio al calcolo letterale

Manteniamo la suddivisione in sommandi con multipli di 10:

12 • 13 = (10 + 2) • (10 + 3) = 100 + 30 + 20 + 6 = 156
22 • 23 = (20 + 2) • (20 + 3) = 400 + 60 + 40 + 6 = 506
32 • 33 = (30 + 2) • (30 + 3) = 900 + 90 + 60 + 6 = 1056
42 • 43 = (40 + 2) • (40 + 3) = 1600 + 120 + 80 + 6 = 1806
52 • 53 = (50 + 2) • (50 + 3) = 2500 + 150 + 100 + 6 = 2756

Osserviamo ora i totali parziali ottenuti:

la prima colonna contiene dei quadrati (100, 400, 900)
la seconda colonna contiene multipli di 30 (30, 60, 90)
la terza colonna contiene multipli di 20 (20, 40, 60)
e la quarta colonna contiene sempre 6

Continuando otteniamo:

$62 \cdot 63 = (60 + 2) \cdot (60 + 3) = 3600 + 180 + 120 + 6 = 3906$
$72 \cdot 73 = (70 + 2) \cdot (70 + 3) = 4900 + 210 + 140 + 6 = 5256$
$82 \cdot 83 = (80 + 2) \cdot (80 + 3) = 6400 + 240 + 160 + 6 = 6806$
$92 \cdot 93 = (90 + 2) \cdot (90 + 3) = 8100 + 270 + 180 + 6 = 8556$

Tutti questi esempi hanno qualcosa in comune. Si può riassumere questo elemento comune in un unico forma?
per esempio, nelle parentesi si può mettere qualsiasi numero multiplo di 10. Se non vogliamo scriverne uno particolare, possiamo scrivere semplicemente un simbolo, *a* scelto dal nostro alfabeto, che può rappresentare qualsiasi multiplo di 10.

*a* non rappresenta per noi una lettera, ma un **qualsiasi multiplo di 10!**

Possiamo fare calcoli con questo simbolo? Proviamo! Il calcolo che riassume i nostri esempi diventa:

$(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 3a + 2a + 6$

il primo termine, come dagli esempi, è un quadrato. Il secondo è un multiplo di 30, il terzo è un multiplo di 20, ed il quarto è 6.

Possiamo ulteriormente raccogliere questo risultato? Si,

$3a + 2a = 5a$, perchè $(a + a + a) + (a + a) = 5a$

quindi, il nostro risultato finale diventa:

$(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 5a + 6$

Abbiamo definito che *a* vale un qualsiasi multiplo di 10. Possiamo allora sostituire ad *a* un qualsiasi altro numero? proviamo col numero 7!

$(a + 2) \cdot (a + 3) = (7 + 2) \cdot (7 + 3) = 9 \cdot 10 = 90$

e

$a^2 + 5a + 6 = 7^2 + 35 + 6 = 90$

Proviamo la formula sistematicamente sostituendo ad *a* la serie di numeri naturali 1, 2, 3, ....

| $a$ | $(a + 2) \cdot (a + 3) =$ | | $a^2 + 5a + 6$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $(1 + 2) \cdot (1 + 3) =$ | $3 \cdot 4 = 12$ | $1^2 + 5 + 6 = 12$ |
| 2 | $(2 + 2) \cdot (2 + 3) =$ | $4 \cdot 5 = 20$ | $2^2 + 10 + 6 = 20$ |
| 3 | $(3 + 2) \cdot (3 + 3) =$ | $5 \cdot 6 = 30$ | $3^2 + 15 + 6 = 30$ |
| 4 | $(4 + 2) \cdot (4 + 3) =$ | $6 \cdot 7 = 42$ | $4^2 + 20 + 6 = 42$ |
| 5 | $(5 + 2) \cdot (5 + 3) =$ | $7 \cdot 8 = 56$ | $5^2 + 25 + 6 = 56$ |
| 6 | $(6 + 2) \cdot (6 + 3) =$ | $8 \cdot 9 = 72$ | $6^2 + 30 + 6 = 72$ |
| 7 | $(7 + 2) \cdot (7 + 3) =$ | $9 \cdot 10 = 90$ | $7^2 + 35 + 6 = 90$ |
| 8 | $(8 + 2) \cdot (8 + 3) =$ | $10 \cdot 11 = 110$ | $8^2 + 40 + 6 = 110$ |
| 9 | $(9 + 2) \cdot (9 + 3) =$ | $11 \cdot 12 = 132$ | $9^2 + 45 + 6 = 132$ |

se ora osserviamo la crescita tra un risultato e quello immediatamente precedente, notiamo qualcosa?

| $a$ | Risultato | Crescita |
|---|---|---|
| 1 | 12 | |
| 2 | 20 | 8 |
| 3 | 30 | 10 |
| 4 | 42 | 12 |
| 5 | 56 | 14 |
| 6 | 72 | 16 |
| 7 | 90 | 18 |
| 8 | 110 | 20 |
| 9 | 132 | 22 |

Possiamo in questo modo calcolare in modo semplice ulteriori risultati al crescere di *a*?

| $a$ | $(a + 2) \cdot (a + 3) =$ | | $a^2 + 5a + 6$ | Crescita |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 22 |
| 9 | $(9 + 2) \cdot (9 + 3) =$ | $11 \cdot 12 = 132$ | $9^2 + 45 + 6 = 132$ | 24 |
| 10 | $(10 + 2) \cdot (10 + 3) =$ | $12 \cdot 13 = 156$ | $10^2 + 50 + 6 = 156$ | 26 |
| 11 | | | 182 | 28 |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 210 | 30 |
| 13 | 240 | |

**es. per i ragazzi**
**$(a + 4) \cdot (a + 7) =$**
**$(a + 3) \cdot (a + 8) =$**
**$(a + 2) \cdot (a + 5) =$**
**$(2a + 5) \cdot (3a + 6) =$**
**$(3a + 4) \cdot (5a + 8) =$**
**$(8a + 3) \cdot (9a + 7) =$**

**Fare pure calcolare la tabella come sopra per alcuni di questi esempi!**

## 7) Formulazioni generali

Tutti questi esempi si lasciano riassumere nel calcolo algebrico:

$$\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

**Regola**: due parentesi (contenenti sommandi) vengono multiplicate tra loro in maniera tale per cui ogni sommando della prima parentesi si moltiplica per ogni sommando della seconda parentesi (e poi si sommano i risultati parziali ottenuti).

Abbiamo anche visto come si sommano valori multipli del numero *a:*

$8a + 3a = 11a$, $2a + 7a = 9a$

In generale:

$$\boxed{ba + ca + da + .... = (b + c + d + ...) \cdot a}$$

**Regola:** multipli di un numero *a* vengono sommati tra loro sommando i *moltiplicatori* ( moltiplicando poi *a* per la somma ottenuta).

Questa formula può anche essere guardato nel senso inverso:

$$\boxed{(b + c + d + \ldots) \bullet a = ba + ca + da + \ldots.}$$

**Regola collegata:** un numero viene moltiplicato con una somma moltiplicando il numero con ogni sommando.

Possiamo quindi ora formulare le leggi di calcolo per addizione e moltiplicazione in maniera algebrica:

**1ª Legge fondamentale:** I sommandi si possono scambiare: $a + b = b + a$
I fattori si possono scambiare: $a \bullet b = b \bullet a$

Queste due leggi si chiamano *Leggi commutative* di addizione e moltiplicazione. Queste leggi **non valgono per sottrazione e divisione**, come pure in altri domini numerici (numeri immaginari) non valgono per la moltiplicazione.

**2ª Legge fondamentale:** più di due sommandi o fattori possono essere raccolti a piacimento

| | |
|---|---|
| a + b + c = (a + b) + c | 3 + 5 + 9 = 8 + 9 = 17 |
| a + b + c = a + (b + c) | 3 + 5 + 9 = 3 + 14 = 17 |
| a • b • c = (a • b) • c | 2 • 3 • 5 = 6 • 5 = 30 |
| a • b • c = a • (b • c) | 2 • 3 • 5 = 2 • 15 = 30 |

Queste due leggi si chiamano *Leggi associative* di addizione e moltiplicazione.

Le due operazioni (addizione e moltiplicazione) sono legate dalla

*Legge distributiva*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

## 2. La trasformazione di somme in prodotti

Nel primo capitolo ci siamo occupati della moltiplicazione di parentesi. In quest'ultime c'erano somme di numeri. Abbiamo riconosciuto la regola in cui ogni sommando di una parentesi si moltiplica con ogni sommando dell'altra (e poi si sommano i prodotti parziali ottenuti):

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

a sinistra si trova un prodotto di somme, a destra una somma di prodotti.
In questo capitolo ci occupiamo col calcolo opposto: viene data una somma di prodotti; è possibile tramutarli in un prodotto di somme?

Partiamo da seguente calcolo:

$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = ?$

Si nota che il moltiplicando in tutti i prodotti è 9. Questo fatto semplifica il calcolo? Possiamo sommare semplicemente i moltiplicatori e poi moltiplicarne la somma per 9?

$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = (5 + 7 + 8) \cdot 9 = 20 \cdot 9 = 180$

Verifichiamo il risultato calcolando prima i singoli prodotti e poi sommiamo:

$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = 45 + 63 + 72 = 180$

Otteniamo lo stesso risultato. Il primo calcolo è però piû facile da fare.

Un altro esempio:

2 • 15 + 3 • 15 + 5 • 15 = (2 + 3 + 5) • 15 = 10 • 15 = 150

Questo  stato più facile da calcolare che:

2 • 15 + 3 • 15 + 5 • 15 = 30 + 45 + 75 = 150

Si può procedere in questo modo ogni volta che tutti i prodotti hanno un fattore comune. Se bisogna sommare diversi numeri, si può quindi cercare se hanno un fattore comune.

Per esempio:

14 + 21 + 35 = ?

Possiamo riconoscere subito che i sommandi sono tutti multipli di 7:

14 + 21 + 35 = 2 • 7 +  • 7 + 5 • 7 = (2 + 3 + 5) • 7 = 10 • 7 = 70

**Ulteriori esempi (per i ragazzi):**

**9 + 15 + 21 + 24 =**
**11 + 33 + 44 =**

Questo procedimento si chiama "fattorizzazione": il fattore comune viene scritto al di fuori di una parentesi, prima o dopo di essa.

Come dobbiamo fare con la somma 4 + 15 + 49 =?

Si può fattorizzare? No, perchè non esiste un numero che appare come fattore comune in tutti e tre i numeri (tranne 1, infatti 4 = 2 • 2; 15 = 3 • 5; 49 = 7 • 7).

Calcoli algebrici possono chiarire il procedimento:

**ab + ac = a (b + c)**

**$a^2 + ad = a\,(a + d)$**
**$a + a^2 = a\,(1 + a)$**
**$a + a^2 + a^3 = a\,(1 + a + a^2)$**
**$a^2b + ab^2 = ab\,(a + b)$**
**$15a + 3a^2 = 3a\,(5 + a)$**
**$21ab + 35b^2 = 7b\,(3a + 5b)$**
**$33ab^2 + 22a^2b + 11ab = 11ab\,(3b + 2a + 1)$**

Ci sono anche esempi per derivare da una somma un prodotto di 2 parentesi? Devono essere allora forniti almeno 2 sommandi; se si scrivono 4 sommandi qualunque, in generale non sarà possibile ridurli in un prodotto di 2 parentesi, tranne che se si sono scelti casualmente 4 sommandi che derivano dalla moltiplicazione di 2 parentesi, per esempio:

$(2a + 3b) \bullet (5a + 4) = 10a^2 + 8a + 15ab + 12b$

Come si riconosce dai sommandi il prodotto originale? se si osservano i quattro sommandi, non si riesce a riconoscere un fattore comune. Però dai primi due sommandi si può fattorizzare 2a, e dal terzo e dal quarto si può fattorizzare 3b:

$10a^2 + 8a + 15ab + 12b = 2a \bullet (5a + 4) + 3b \bullet (5a + 4) = (2a + 3b) \bullet (5a + 4)$

In entrambe le parentesi si trova la stessa somma. Questa parentesi diventa quindi il fattore comune, che si può fattorizzare ulteriormente:

$2a \bullet (5a + 4) + 3b \bullet (5a + 4) = (2a + 3b) \bullet (5a + 4)$

Si sarebbe potuto procedere anche in un altro modo: dal prime e dal terzo sommandi si fattorizza 5a, e dal secondo e dal quarto il numero 4.

$10a^2 + 8a + 15ab + 12b = 5a \bullet (2a + 3b) + 4 \bullet (2a + 3b) = (5a + 4) \bullet (2a + 3b)$

Le parentesi sono semplicemente scambiate!

Per esecitarsi in classe, bisogna prima avere somme appropriate che possano essere fattorizzate. Si potrebbe far fare ai ragazzi il lavoro di moltiplicare due parentesi, e poi il giorno dopo, come un indovinello, fargli fattorizzare le somme.

**Esercizi per i ragazzi:**

**$6a^2 + 15a + 14ab + 35b = ?$**
**$33a^2 + 55a + 6ab + 10b = ?$**
**$21a^2 + 49a + 15ab + 35b = ?$**

Nel capitolo 1 abbiamo calcolato tanti esempi del tipo:

$(a + 3) \cdot (a + 7) = a^2 + 7a + 3a + 21 = a^2 + 10a + 21$

Come troviamo, a partire da $a^2 + 10a + 21$, il prodotto delle due parentesi?

$a^2 + 10a + 21 = (\qquad) \cdot (\qquad)$?

È chiaro che in entrambe le parentesi il primo termine è a:

$a^2 + 10a + 21 = (a + \quad) \cdot (a + \quad)$

Come troviamo però gli altri termini? Cominciamo con il chiamarli p e q.

$a^2 + 10a + 21 = (a + p) \cdot (a + q)$

Se moltiplichiamo ora le parentesi, allora $p \cdot q = 21$ e $p + q = 10$. Quindi cerchiamo due numeri che moltiplicati danno 21 e sommati danno 10. Solo 3 e 7 soddisfano queste condizioni, quindi:

$a^2 + 10a + 21 = (a + 3) \cdot (a + 7)$

Proviamolo con la somma $a^2 + 7a + 10$. Esiste un prodotto che corrisponde a questa somma? Esistono due numeri che sommati danno 7 e moltiplicati danno 10? Certo! 2 e 5 sono questi numeri!

$a^2 + 7a + 10 = (a + 2) \cdot (a + 5)$

p e q non sono però sempre riconoscibili così facilmente come in questo esempio. Prendiamo l'esempio $a^2 + 10a + 24 =$? Si cercano 2 numeri che sommati danno 10 e moltiplicati danno 24. Bisogna provare tutte le possibilità, e trovare tutti quei numeri che moltiplicati danno 24: $24 = 2 \cdot 12$, $24 = 3 \cdot 8$, $24 = 4 \cdot 6$. Ci sono tra queste possibilità, due numeri che sommati danno 10? certo, 6 e 4, quindi

$a^2 + 10a + 24 = (a + 6) \cdot (a + 4)$

Se il terzo sommando è 24, allora esistono per il secondo sommando altre 2 possibilità:

$a^2 + 11a + 24 = (a + 3) \cdot (a + 8)$
$a^2 + 14a + 24 = (a+12) \cdot (a + 2)$

Dimentichiamo però facilmente che anche: $a^2 + 25a + 24 = (a + 1) \cdot (a + 24)$

È un ottimo esercizio per ragazzi di 7a classe trovare p e q.

**Esercizi per i ragazzi:**
**$a^2 + 9a + 18 =$**
**$a^2 + 10a + 16 =$**
**$a^2 + 13a + 36 =$**
**$a^2 + 11a + 28 =$**
**$a^2 + 12a + 27 =$**
**$a^2 + 5a + 4 =$**
**$a^2 + 8a + 7 =$**
**$a^2 + 10a + 9 =$**

(negli ultimi 3 esempi p o q è uguale a 1)

Trovare tutte le possibilità per il secondo sommando, quando viene fornite il terzo sommando.

$a^2 + \ldots + 18 =$
$a^2 + \ldots + 30 =$

$a^2$ +... + 36 =
$a^2$ +... + 42 =
$a^2$ +... + 81 =
$a^2$ +... + 100 =

Quali possibilità ci sono per il terzo sommando, se viene fornito il secondo?

$a^2 + 7a + ... =$
$a^2 + 9a + ... =$

Interessanti sono esempi di questo genere:
$a^2 + 10a + 25 =$
$a^2 + 12a + 36 =$
$a^2 + 18a + 81 =$
$a^2 + 20a + 100=$

Il terzo sommando è un quadrato, mentre il secondo vale il doppio della radice del terzo.

$a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2$
$a^2 + 12a + 36 = a^2 + 2 \cdot 6 \cdot a + 6^2$
$a^2 + 18a + 81 = a^2 + 2 \cdot 9 \cdot a + 9^2$
$a^2 + 20a + 100 = a^2 + 2 \cdot 10 \cdot a + 100^2$

In questo caso p e q sono uguali e sono anche uguali alla radice del quadrato.

$a^2 + 10a + 25 = (a + 5) \cdot (a + 5) = (a + 5)^2$
$a^2 + 12a + 36 = (a + 6) \cdot (a + 6) = (a + 6)^2$
$a^2 + 18a + 81 = (a + 9) \cdot (a + 9) = (a + 9)^2$
$a^2 + 20a + 100 = (a + 10) \cdot (a + 10) = (a + 10)^2$

Esempi di questo tipo sono particolarmente importanti. Appaiono spesso nei calcoli algebrici. Per chiarire ulteriormente la costruzione di questi esempi, chiamiamo il terzo sommando $b^2$; il secondo si chiama quindi 2ba. Quindi:

$a^2 + 2ba + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$

Questa struttura è molto importante, essendo un elemento base del calcolo algebrico. Si chiama *teorema del binomio.* Ovviamente si possono anche invertire a e b nel secondo sommando:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Questa formula descrive come il quadrato di una somma può essere calcolato partendo dai sommandi:

*Il quadrato del primo sommando, più il doppio prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo sommando.*

La formula può essere esercitata in molti esempi concreti:

$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \bullet 10 \bullet 1 + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121$
$12^2 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \bullet 10 \bullet 2 + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$
.....
$19^2 = (10 + 9)^2 = 10^2 + 2 \bullet 10 \bullet 9 + 9^2 = 100 + 180 + 81 = 361$

Una volta raggiunta confidenza in questi calcoli, si possono anche scrivere in maniera più corta:

| | | |
|---|---|---|
| … | … | Zuwachs |
| $18^2 = (10+8)^2 = 100 + 160 + 64 =$ | $324$ | 37 |
| $19^2 = (10+9)^2 = 100 + 180 + 81 =$ | $361$ | 39 |
| $20^2 =$ $=$ | $400$ | 41 |
| $21^2 = (20+1)^2 = 400 + 40 + 1 =$ | $441$ | 43 |
| $22^2 = (20+2)^2 = 400 + 80 + 4 =$ | $484$ | 45 |
| $23^2 = (20+3)^2 = 400 + 120 + 9 =$ | $529$ | 47 |
| $24^2 = (20+4)^2 = 400 + 160 + 16 =$ | $576$ | 49 |
| $25^2 = (20+5)^2 = 400 + 200 + 25 =$ | $625$ | 51 |
| $26^2 = (20+6)^2 = 400 + 240 + 36 =$ | $676$ | 53 |
| $27^2 = (20+7)^2 = 400 + 280 + 49 =$ | $729$ | 55 |
| $28^2 = (20+8)^2 = 400 + 320 + 64 =$ | $784$ | 57 |
| $29^2 = (20+9)^2 = 400 + 360 + 81 =$ | $841$ | 59 |
| $30^2 =$ $=$ | $900$ | 61 |
| $31^2 = (30+1)^2 = 900 + 60 + 1 =$ | $961$ | 63 |
| $32^2 = (30+2)^2 = 900 + 120 + 4 =$ | $1024$ | |

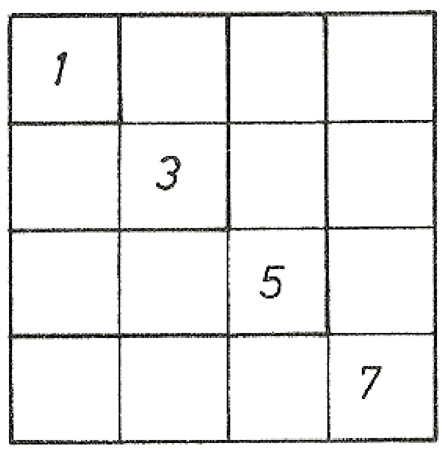
Si può continuare così fino a $99^2$. Gli studenti scoprono che $25^2 = 625$ ha il ruolo di un asse di simmetria. Sopra e sotto questo valore ci sono le stesse cifre finali, 76, 29, 84, .... Questa simmetria ha una ragione di essere? La troviamo se analizziamo la crescita da un quadrato all'altro. Da 324 a 361 abbiamo una crescita di 37, da 361 a 400 è di 39, e così via. Sono numeri dispari consecutivi. Sperimentiamo questa costruzione in modo particolare se osserviamo la sequenza di quadrati dall'inizio:

| | |
|---|---|
| $0^2 = 0$ | |
| | 1 |
| $1^2 = 1$ | |
| | 3 |
| $2^2 = 4$ | |
| | 5 |
| $3^2 = 9$ | |
| | 7 |
| $4^2 = 16$ | |
| | 9 |
| $5^2 = 25$ | |
| | 11 |
| $6^2 = 36$ | |
| … | |

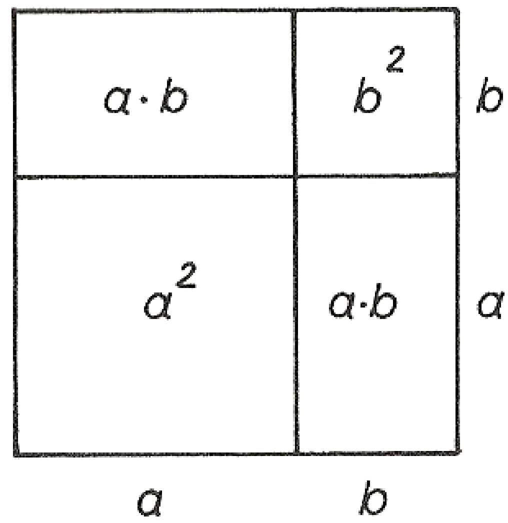
Osserviamo ora la crescita prima e dopo $25^2 = 625$: sono 49 e 51. Sommati danno 100. La crescita di 47 sommata a quella di 53 dà anche 100, e così via. Di conseguenza i quadrati prima e dopo $25^2 = 625$ devono distare rispettivamente 100, 200, 300 ecc. e per questo terminano con le stesse cifre. Questa crescita dei quadrati consecutivi può anche essere descritta nel seguente modo. se si sommano i primi n numeri dispari, si ottiene come somma $n^2$. Esempio: n = 5

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 2^2$

L'addizione di numeri dispari consecutivi può anche essere mostrata graficamente. Negli angoli si trovano1, 3, 5, 7 ...; sommati danno i quadrati dei numeri consecutivi $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, ...




Anche il teorema del binomio può essere mostrato graficamente.




Osservazione sul modo di scrivere: nella moltiplicazione algebrica il punto di moltiplicazione può essere scritto o lasciato via.

a (b + c) significa a • (b + c)
(a + 4) (a + 6) =(a + 4) • (a + 6)
ab = a • b